Grado 11o

EDUCACIÓN MEDIA CON PROFUNDIZACIÓN EN EDUCACIÓN PARA EL TRABAJO

INSTITUCIONES PARTICIPANTES DEL PROYECTO:
Fundación Luker
Comité Departamental de Cafeteros de Caldas
Corpoeducación
Instituto Caldense para el Liderazgo
Secretaría de Educación de Manizales
Universidad Autónoma de Manizales

CÁLCULO

UNIDADES 1·2·3

Grado 11º

EDUCACIÓN MEDIA CON PROFUNDIZACIÓN EN EDUCACIÓN PARA EL TRABAJO

Autor Cálculo:

ABEL ANTONIO AGUDELO CARMONA

Licenciado en matemáticas - Universidad Católica-

Posgrado en computación para la docencia -Universidad Antonio Nariño-

Asesoría y Coordinación:

Mg. RUBIEL TRUJILLO ARIAS

Lic. JOSÉ RAÚL OSPINA OSORIO

I.A. CLAUDIA MILENA CARDONA TORRES

Consultora Asociada Corpoeducación LILIANA GONZÁLEZ ÁVILA

Diseño y diagramación:

ESPACIO GRÁFICO COMUNICACIONES S.A.

CÁLCULO

UNIDADES 1 · 2 · 3

PRESENTACIÓN

El presente módulo de interaprendizaje para grado 11º hace parte de la estrategia de ampliación de cobertura en educación media para el área rural del departamento de Caldas. Este material pedagógico, el cual sigue los principios y fundamentos del Programa Escuela Nueva, ofrece los contenidos generales del área de Cálculo de acuerdo con los estándares curriculares y promueve en los estudiantes el desarrollo de competencias laborales generales, las cuales les permitirán desempeñarse exitosamente en su vida productiva futura.

El diseño de este material se realizó en el marco del Proyecto de **EDUCACIÓN MEDIA CON PROFUNDIZACIÓN EN EDUCACIÓN PARA EL TRABAJO** adelantado por el Comité Departamental de Cafeteros de Caldas, con el importante concurso de la FUNDACIÓN LUKER, quien aportó el capital semilla para el diseño y puesta en marcha de la propuesta de educación media para el área rural del departamento de Caldas, Corpoeducación, el Instituto Caldense para el Liderazgo, la Universidad Autónoma y la Secretaría de Educación de Manizales, éstas últimas instituciones pusieron a disposición del proyecto su experiencia en el desarrollo de proyectos educativos, orientados hacia la educación para el trabajo.

Esta primera versión de módulos para el grado 11º debe considerarse como material de prueba y por lo tanto estará sujeto a las modificaciones que se requieran, tanto en contenido como en presentación.

Adicionalmente, este módulo maneja un componente transversal de proyecto de vida, con el ánimo de atender las necesidades de los jovenes con relación a su orientación vocacional.

Agradecemos a los autores por sus conocimientos, dedicación y esfuerzo puesto en el diseño del presente módulo de interaprendizaje con Metodología Escuela Nueva.

ELSA INÉS RAMÍREZ MURCIA
Coordinadora Programas de Formación y Educación
Comité Departamental de Cafeteros de Caldas

CONTENIDO

UNIDAD 1

EL CUENTO DE CONTAR Y SUS APLICACIONES

VIADUCTO PEREIRA - DOS QUEBRADAS

Diseños detallados para construcción por la firma Figg Engineers, Inc.

Tipo de puente: estructura colgante atirantada, con tablero de vigas metálicas y losa de concreto.

Longitud: 615 m, con una luz principal de 211 m.

Altura de las pilas principales: 100 m.

Una estructura como ésta que debe soportar no sólo el peso del flujo vehicular sino también los embates del viento y las amplias oscilaciones producidas por el efecto de un posible terremoto, requiere diseños en que intervienen, con toda seguridad, ecuaciones e inecuaciones.

LOGROS DE LA UNIDAD:

- Actualiza conocimientos de matemática ya estudiados como conjuntos, ecuaciones y factorización.
- Identifica los diversos conjuntos numéricos, justifica su creación y efectúa con ellos operaciones elementales.
- Define, grafica y clasifica los intervalos y ejecuta correctamente la unión y la intersección entre ellos.

- Define las desigualdades, establece sus propiedades y las usa de manera adecuada para resolver inecuaciones, interpretando geométricamente los resultados.
- Define el concepto de valor absoluto, establece sus propiedades y las usa para resolver ecuaciones e inecuaciones que contienen valor absoluto.
- Comprende y manifiesta los sentimientos y pensamientos sobre algún tema o situación. (COMUNICACIÓN).
- Utiliza en forma eficiente las herramientas necesarias para desarrollar los procesos. (MANEJO TECNOLÓGICO).
- Usa adecuadamente la información para enfrentar situaciones. (GESTIÓN DE LA INFORMACIÓN).
- Comprende el valor del trabajo en la sociedad.

Amigos y amigas de grado once: Estamos culminando nuestro nivel de Educación Media.

Obtenido el grado, debemos enfrentarnos a la realidad de la vida, que puede ser: vincularse a actividades laborales o continuar con nuestros estudios. En ambos casos se requiere tener muy claros elementos de análisis para poder estructurar nuestro PROYECTO DE VIDA cuya formulación se coordinará desde el área de filosofía.

Los análisis deben orientarse a nuestro desempeño como personas integrales en los campos:

1. **Personal:**
   ¿Quién soy?
   ¿Cuáles son mis fortalezas o limitaciones como persona?
   ¿Qué valores deben caracterizar mi desempeño social?

2. **Familia:**
   ¿Cómo son nuestras relaciones?
   ¿Cómo es nuestra comunicación?
   ¿Es incondicional nuestro apoyo?
   ¿Hay respeto por las diversas formas de pensar?
   ¿Contaré con apoyo económico para lograr mis metas?

3. **Trabajo:**
   ¿Cumplo con lo que me compete como estudiante?
   ¿Soy consciente de que debo prepararme para afrontar los retos que me presentará la vida?
   ¿He pensado en cómo será mi futuro, bien sea como persona vinculada laboralmente con una institución o quizá pueda iniciar mi propia empresa?
   ¿He analizado las posibilidades de trabajo del medio en que vivo de tal modo que me pueda vincular cuando concluya mis estudios?

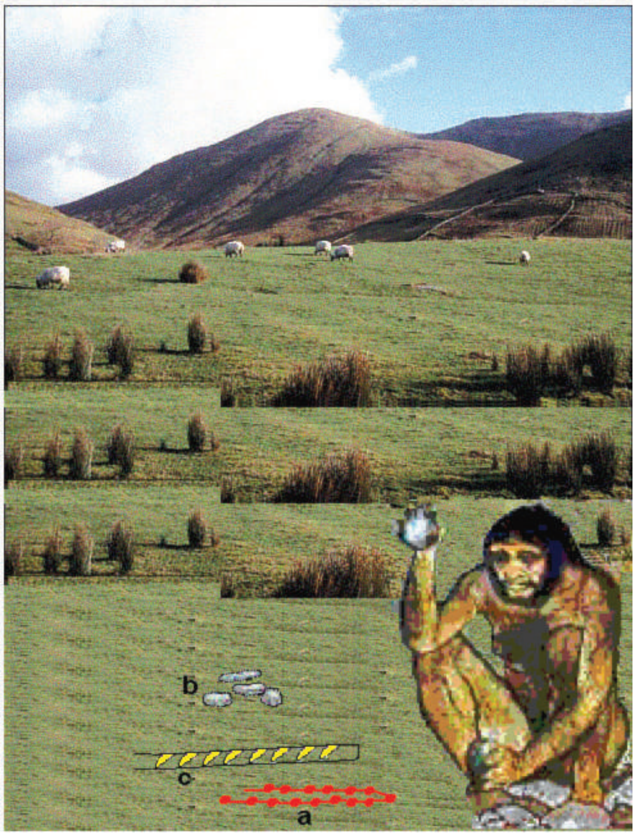
4. **Comunidad:**
   ¿Apoyo, en la medida de mis capacidades, cualquier iniciativa que beneficie a mi comunidad?
   ¿Soy solidario con las personas que me rodean?
   ¿Qué aporte personal puedo hacer por mis vecinos?

En esta unidad reflexionaremos específicamente sobre lo que será nuestro desempeño en el TRABAJO.

Los aprendizajes matemáticos aquí desarrollados contribuirán en el trabajo (como empresario o como trabajador) a mostrar unos desempeños eficientes, bien sea en mi propia empresa o bien como una persona bien cualificada en el campo laboral.

GUÍA 1

LOS CONJUNTOS NUMÉRICOS ¿CÓMO CONTABA EL HOMBRE PRIMITIVO?



Usando guijarros o nudos en una cuerda o ranuras en un trozo de madera, el hombre primitivo podía determinar si su rebaño había crecido o se había disminuido.

INDICADORES DE LOGROS

- Explica, lógicamente, la necesidad de ampliar el conjunto numérico.
- Describe cada uno de los conjuntos numéricos.
- Identifica los diferentes tipos de números y establece apropiadamente las relaciones de pertenece, no pertenece, contenido y no contenido.
- Representa los reales en la recta numérica (recta real).
- Comprende, interpreta, analiza y produce diferentes tipos de textos según sus necesidades. (COMUNICACIÓN).

- Expresa con autonomía lo que quiere y lo que piensa en forma verbal y no verbal.
- Usa un lenguaje verbal y no verbal adecuado al medio.
- Demuestra respeto por los conceptos emitidos por los otros.
- Reconoce la diferencia entre procesos de información y comunicación.
- Identifica algunas características básicas que debe poseer la persona para el desempeño en el trabajo.

Con los compañeros leemos y analizamos el siguiente contenido:

> Además de los conjuntos numéricos que vamos a desarrollar en esta guía, también trataremos la competencia laboral general **Comunicación**, que se entiende como "capacidad para comprender ideas o bien símbolos que facilitan la adecuada interacción y la realización de actividades propias de una cultura o una sociedad".
> *"Es una competencia que aplicamos permanentemente, toda vez que tenemos la necesidad de comunicarnos a todo momento con las personas que nos rodean".*

Además, de estar atentos a los conceptos y actividades que encontremos en la guía, relacionados con esta competencia debemos tener en cuenta los conceptos sobre trabajo.

A

¿QUÉ CONOZCO SOBRE LOS CONJUNTOS NUMÉRICOS ESTUDIADOS EN CURSOS ANTERIORES?

Leo y analizo las siguientes situaciones:

En la gráfica que hay en la presentación de ésta guia, ¿Qué elementos que sirvan para la comunicación se observan?

¿Se pueden considerar los números como elementos que sirven para comunicarse?
En otros grados se ha trabajado con ejercicios como estos:

2 + 5 = _______ ó 7 * 9 = _______

¿Cuál conjunto numérico se está utilizando y cuáles operaciones se indican?

Si planteamos los ejercicios como:

5 + 2 = _______ ó 9 * 7 = ________

¿Cómo son los resultados obtenidos comparados con los anteriores?

¿Qué propiedades se han aplicado?

Comunique y discuta sus respuestas con las de otro compañero, pónganse de acuerdo y prepárense para discutirlas con el subgrupo.

Ahora planteemos lo siguiente:

7 – 4 = _______ y 4 – 7 = _______. ¿Cómo son los resultados? ¿Es suficiente el conjunto de los naturales para efectuar la operación SUSTRACCIÓN?

Igualmente, discuto mi respuesta con otro compañero y estemos listos para discutirla con el subgrupo.

B

¿PARA QUÉ SE CREAN LOS ENTEROS?

Leo, interpreto, interiorizo y anoto en el cuaderno lo que aparece en el recuadro verde. Además, anoto las respuestas que considero necesarias para hacer las discusiones.

Al tratar de sumar dos números naturales, la operación siempre es posible, así se conmuten los dos sumandos. Con la sustracción se comprueba que en ocasiones la operación no tiene sentido en los naturales, es decir, es imposible ejecutar la resta.

Como el problema de la sustracción debía ser resuelto, el hombre solucionó esa dificultad creando otro conjunto numérico: LOS ENTEROS.

Los enteros se obtienen a partir de los naturales anteponiéndoles el signo “+“ ó el “–“ e introduciendo el “0“ (cero). Por tanto:

$Z= \{-\infty \ldots,-3,-2,-1,0,+1,+2,3,4,\ldots+\infty\}$

Como se ve, los Z están conformados por los enteros positivos Z^+, Z^- y el 0.

Luego: $Z= Z^+ \cup Z^- \cup \{0\}$

Por lo general se omite el signo "+" en los enteros positivos, es decir, los enteros positivos y los naturales son un mismo conjunto.

Con algunos ejemplos, verifique que en **Z** siempre se pueden sumar, multiplicar y restar dos números.

Veamos lo que ocurre con: 20=÷4 _______ y con -10÷2=______. ¿A cuál conjunto le pertenecen los resultados? Discuta su respuesta con un compañero.

Si conmutamos el dividendo y el divisor, ¿se obtendrá el mismo resultado? Evidentemente, no. Tal situación obliga a ampliar el conjunto numérico, llegándose así a los números racionales o fraccionarios.

Los racionales se definen formalmente como:
$Q=\left\{x=\frac{a}{b}\,/\,a\in Z\wedge b\in Z\wedge b\neq 0\right\}$ (se lee "el conjunto Q de los racionales está conformado por los x que son iguales a "a" sobre "b" tales que **a** le pertenece a los enteros y **b** le pertenece a los enteros y **b** es diferente de 0). Esta última parte de la definición " prohíbe " la división por 0.

Son racionales: $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{16}{75}$; $-\frac{8}{2}$; $\frac{0}{3}$; 6 No son irracionales $\frac{3}{0}$; $\frac{0}{0}$ (tienen el aspecto de una fracción, pero no se puede dividir por 0).

Si efectuamos las divisiones indicadas en los fraccionarios del ejemplo, resulta:

$$\frac{1}{2}=0.500\ldots;\ \frac{3}{4}=0.7500\ldots;\ \frac{2}{3}=0.666\ldots;\ \frac{16}{75}=0.2133\ldots;\ -\frac{8}{2}=-4.00..;\ \frac{0}{3}=0.00.$$

¿Qué característica tienen los resultados que aparecen a la derecha del "="?

Efectivamente, los racionales se reconocen porque se pueden escribir como un cociente entre enteros (sin que el divisor sea 0) o como desarrollos decimales periódicos.

A propósito, ¿qué entiende por **periódico**?

Cito algunos ejemplos usando elementos de su entorno y compare su respuesta con la de un compañero.

En este momento ¿cuál es nuestro conjunto más amplio?

Comparo mi respuesta con la de un compañero.

En los racionales están definidas la suma, la sustracción, la multiplicación y la división (siempre que el divisor no sea 0), pero empezamos a enfrentarnos a situaciones como estas:

$$\sqrt{25}\,;\ \sqrt[3]{8}\,;\ \sqrt[5]{-32}\,;\ \sqrt{\frac{16}{81}}\,;\ \sqrt{2}\,;\ \pi$$

Si simplificamos donde sea posible, queda:

$\sqrt{25}\,;\ \sqrt[3]{8}=2\,;\ \sqrt[5]{-32}=-2\,;\ \sqrt{\frac{16}{81}}=\pm\frac{4}{9}$ Se observa que los resultados son racionales.

En $\sqrt{2}$ la simplificación es imposible y lo único que podemos hacer es aproximar el resultado, así: $\sqrt{2}\approx 1.414213...$ y $\pi \approx 3.141592...$ (el símbolo "≈" se lee aproximadamente igual) y son desarrollos decimales no periódicos, en contraposición a los números racionales. Este nuevo conjunto es el de los IRRACIONALES:

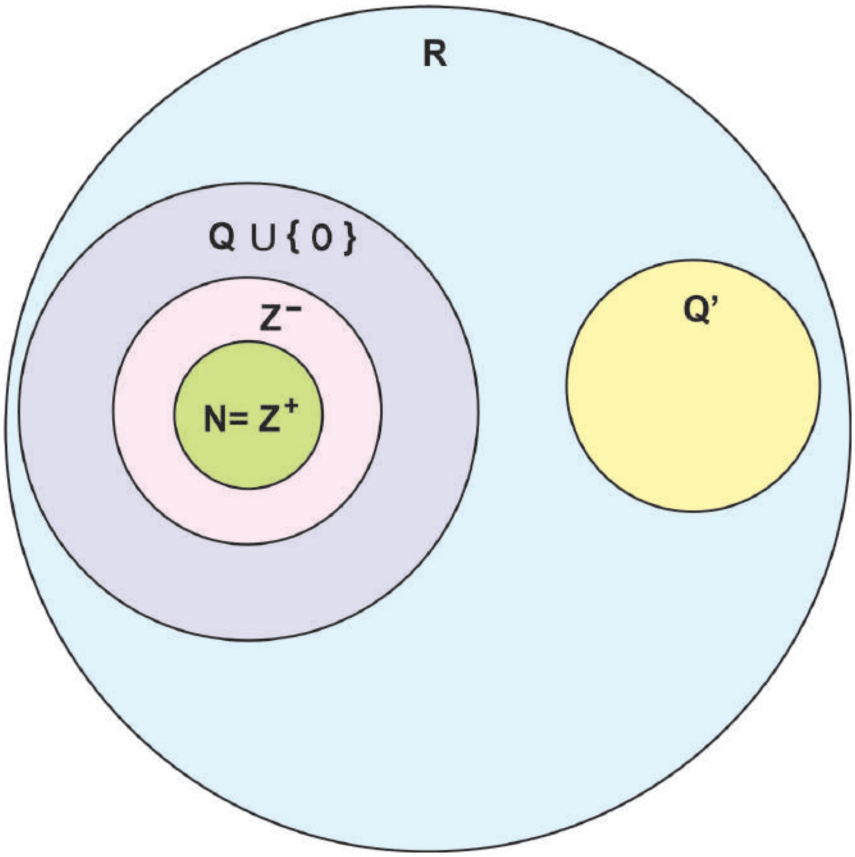
Q′= {Son las raíces no exactas y números como π, e}

Nótese que en este momento tenemos dos conjuntos que son disyuntos, es decir, no tienen elementos comunes y si los unimos tendremos el gran conjunto de los números reales que será el conjunto referencial o universal para el desarrollo de los temas del programa de cálculo. Luego:

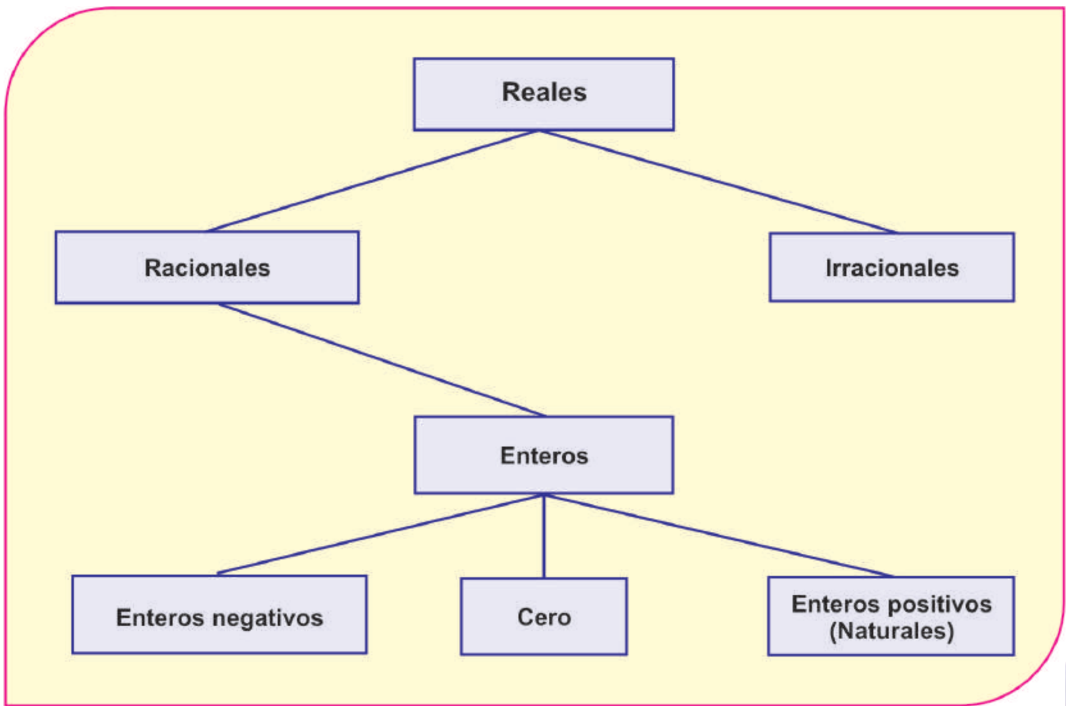
R = Q∪Q′, cuya característica es que se pueden expresar como desarrollos decimales.

En los reales **R** están definidas todas las operaciones: suma, resta, multiplicación, división (que no sea entre 0), potenciación, radicación (siempre y cuando no se trate de raíces pares de números negativos) y logaritmación (siempre que no sea de números negativos).

A continuación se presenta el diagrama de Venn-Euler de los conjuntos numéricos que es útil para establecer la verdad o falsedad de enunciados verbales.

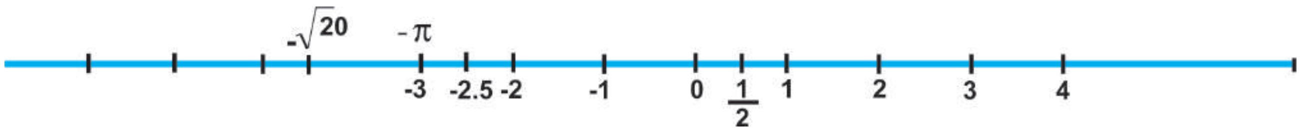


Igualmente se presenta el diagrama arbolar de los conjuntos numéricos, también para decidir la verdad o falsedad de enunciados verbales.



LOS NÚMEROS REALES Y LA RECTA REAL

Es bastante útil para nuestros propósitos representar geométricamente los reales. Para ello consideremos la recta que se ve en la gráfica; se conviene en que 0 es el punto de referencia u origen; todos los puntos que están a su derecha se consideran positivos y en sentido contrario, negativos; con un segmento escogido arbitrariamente metrizamos, tanto a la derecha como a la izquierda de 0 y aceptamos que la longitud de ese segmento mide 1, es decir, es la unidad.



En la recta se pueden representar los naturales (1, 2, 3, 4...), los enteros (0, +1, -1, -2,...), los racionales (1/2, -5/2,...) y los irracionales (- π, -$\sqrt{20}$,...), o sea, todos los números reales: es la recta real.

> El lenguaje más preciso que existe es el de las matemáticas porque sus símbolos son universalmente aceptados, ya que comunican ideas y ofrecen información útil y concisa.
>
> Así como en las matemáticas, el lenguaje que utilicemos en la cotidianidad debe ser claro, concreto y conciso para que la comunicación resulte efectiva.

Para afianzar nuestro conocimiento sobre conjuntos numéricos, analicemos e interpretemos con un compañero algunos ejemplos, pero antes de iniciar el ejercicio el ayudante del subgrupo verificará la forma como cada uno de los integrantes interpreta o comprende las instrucciones de los planteamientos 1 a 8, pues cuando interactuamos con nuestros compañeros y el profesor, se evidencia la competencia “comunicación”.

Por ello seamos claros, concretos y precisos en nuestros mensajes; respetemos el uso de la palabra y hagamos uso de todas las formas utilizadas para comunicarnos: signos, expresiones verbales y conceptos escritos. El interés y responsabilidad que demostremos en el trabajo nos fortalecerá la formación que se requiere para el éxito en todas las actividades.

Ahora sí, iniciamos el ejercicio:

1) Partiendo del conjunto numérico más reducido al más amplio clasifiquemos el número -12 (podemos usar el diagrama de Venn-Euler ó el arbolar para ayudarnos).

   -12 es entero, es racional, es real.

2) Partamos ahora del conjunto más amplio al más reducido para clasificar el número $\sqrt[3]{64}$
   Como $\sqrt[3]{64}=4$, entonces es real, racional, entero, natural.

3) ¿Es verdadero o es falso que $1.000 \in N$? Es verdadero porque 1000 es un número natural.

4) ¿Es verdadero o falso que $5.41... \in Z$?. Es falso porque un desarrollo decimal periódico es un número racional.

5) Usando los símbolos $\subset$ (contenido en), $\not\subset$ (no contenido en) llenar los espacios de modo que la proposición sea verdadera:

   N____ Z; Q____ N; R_____ N

   Guiándonos por los diagramas anteriores, se tiene: $N \subset Z$; $Q \not\subset N$; $R \subset N$

   Ayudándose de los diagramas, decidir la verdad o falsedad de las siguientes proposiciones, justificando la respuesta:

6) Todos los naturales son racionales: es verdadero porque los racionales incluyen a los enteros que, a su vez incluyen a los naturales.

7) Algunos enteros son naturales: es verdadero porque los naturales y los enteros positivos son el mismo conjunto.

8) Algunos racionales no son reales: es falso porque los reales incluyen a todos los racionales.

Para comprobar el avance en el tema de los conjuntos numéricos, con el mismo compañero del subgrupo analizamos el siguiente comentario y luego, basándonos en los ejercicios resueltos antes, desarrollamos en el cuaderno los planteamientos 1 y 2. Compartimos y discutimos nuestras apreciaciones y después de concertar nos preparamos con argumentos, para defender nuestra posición, pues si nos proyectamos al futuro podemos prever que el conocimiento de los conjuntos numéricos puede darnos la posibilidad de ser más eficientes.

Podemos pensar que si nuestro ingeniero empleador nos pide, por ejemplo, preparar una mezcla de cemento al 3, realmente nos está indicando que por cada tres paladas de arena debemos usar una de cemento; y si fuera 1.5 de arena, debemos deducir que se requiere 0.5 (media palada) de cemento si queremos conservar la proporción. No olvidemos que estamos en un mundo altamente competido y en consecuencia hemos de procurar ser siempre muy eficientes laboralmente si queremos tener posibilidades de éxito.

1. Completamos la siguiente tabla con los símbolos $\in$ ó $\notin$ según que el número de la columna de la izquierda pertenezca o no a los conjuntos indicados en la parte superior:

Conjunto / Números	N	Z	Q	Q'	R
8	$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$
-8					
$-\frac{2}{3}$					
2.32444...					
$\sqrt[5]{32}$					

2. Utilizando los símbolos (contenido en), (no contenido en) llenamos los espacios de modo que la proposición sea verdadera (nos ayudamos con los diagramas):

Z____Q; Q____R; Z____N; Q____Z; { 0 }____N;

Por último, evaluamos nuestra comunicación con el compañero de trabajo: ¿nos entendimos bien? ¿Fuimos claros en los conceptos expresados? ¿Nos aportamos mutuamente?

D

¿PARA QUÉ NOS SIRVEN LOS DIVERSOS CONJUNTOS NUMÉRICOS?

Menciono algunas actividades de mi cotidianidad en las que necesito utilizar elementos de los diversos conjuntos numéricos (por ejemplo, cuando compramos algo usamos el conjunto de los racionales –así sea inconscientemente- para determinar cuánto debemos pagar).

Comparto mis ideas con las de otros compañeros y presentamos informe al profesor.

Igualmente, señalo momentos familiares en los que exista buena o mala comunicación; si es mala, es el momento para orientar a mi familia sobre la forma correcta de comunicarse entre los miembros que la conforman.

También evaluamos el ambiente de trabajo que se percibe en mi subgrupo para identificar fortalezas y debilidades en el desempeño.

La comunicación puede darse en forma verbal, por escrito, por gestos, a través de símbolos o signos, etc. En el caso de las matemáticas, que tienen su propio lenguaje, se usan variados signos para dar información.

Comprobémoslo: con los compañeros de subgrupo digamos que información nos dan los siguientes símbolos:

$\neq$ ____

(x, y) ____

x^5 ____

$\Rightarrow$ ____

$\forall x$ ____

π ____

$a + b$ ____

IDEAS PARA MI PROYECTO DE VIDA

Hago una introspección, medito sobre mi proyección al futuro, mis sueños e ilusiones, en qué me gustaría desempeñarme, los medios disponibles para alcanzar mis metas y estos elementos los escribo y archivo en mi carpeta personal con la finalidad de utilizarlos en la estructuración de mi proyecto de vida.

Además, reflexiono sobre los siguientes cuestionamientos:

a. ¿Qué tipo de actividades laborales conozco?

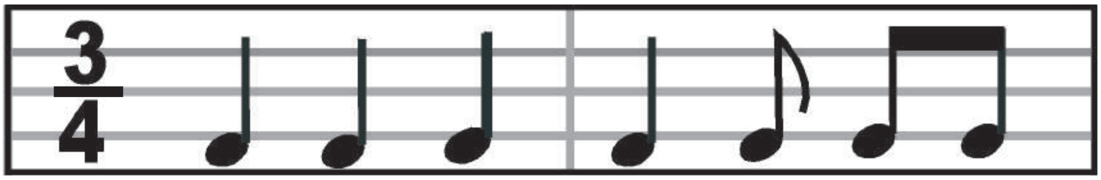
b. ¿Cuáles me gustan y por qué?

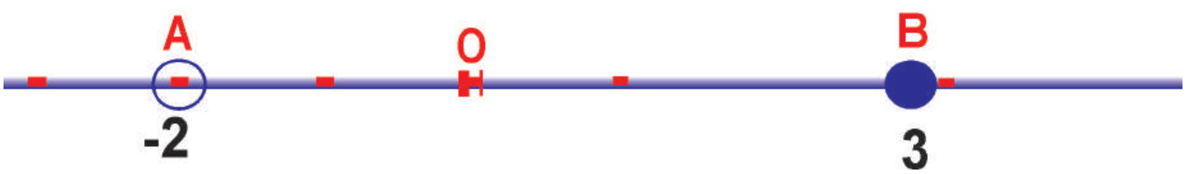
c. ¿Tiene relación mi gusto con las habilidades que poseo?

ESTUDIO Y ADAPTACIÓN DE LA GUÍA

GUÍA 2

LOS INTERVALOS
¿SON MÚSICA O TIEMPO O GEOMETRÍA?





INDICADORES DE LOGROS:

- Define un intervalo en los reales y lo describe correctamente usando notación propia de intervalos y notación de conjuntos.
- Realiza con suficiencia las operaciones unión e intersección entre intervalos.
- Incorpora a sus actividades las herramientas informáticas. (MANEJO TECNOLÓGICO).

- Interpreta y aplica las instrucciones y maneja efectivamente los principales instrumentos y ayudas que ofrecen las tecnologías aplicables a su entorno.
- Realiza manejo preventivo y reparación básica de las herramientas usadas en sus procesos.
- Utiliza las herramientas en forma adecuada, procurando su seguridad personal.

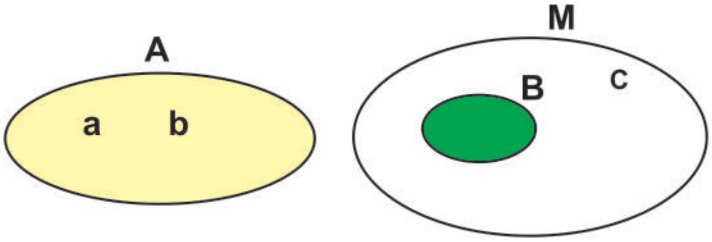
En esta unidad, relativa a los intervalos, también nos adentraremos un poco en la competencia laboral general **Manejo Tecnológico** que se define como "la capacidad para identificar, seleccionar y utilizar en forma apropiada los instrumentos y programas necesarios que nos permitan ser más eficientes en nuestro desempeño, tanto en nuestro quehacer escolar actual como en nuestra vida laboral futura".

Esta competencia nos permite aprovechar más eficientemente todas las herramientas a las que tengamos acceso para ponerlas a nuestro servicio y al de nuestra comunidad, lo que permitirá un desempeño exitoso en todas nuestras actividades; si tenemos oportunidad de usar esas máquinas maravillosas que son los computadores, no dudemos en aprovecharlas para facilitar la elaboración de los trabajos escritos con una mejor presentación, por ejemplo.

Estemos pendientes de las sugerencias y actividades propuestas en la guía y que se refieren a esta competencia.

A

Leo, analizo y comparto con un compañero las siguientes situaciones (si necesito escribir, lo hago en mi cuaderno):



Para tratar de interpretar los conceptos sobre INTERVALO es necesario revisar los saberes relacionados con "pertenece a", "contenido en", "segmento" y "puntos extremos del segmento".

Guiándome por los diagramas de Venn-Euler (que están elaborados usando PAINT, pulsando en **Elipse**) decido si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas:

a es elemento de A y se simboliza por $a \in A$

a es subconjunto de A y se simboliza por $a \subset A$

B es elemento de M y se simboliza por $B \in M$

B es subconjunto de M y se simboliza por $B \subset M$

Nos ponemos de acuerdo y estamos listos para sustentar ante el subgrupo. Si es necesario, consultamos con nuestro profesor.

(Los símbolos $\in, \subset$ están elaborados usando el **Editor de Ecuaciones** de Word. Más adelante se le indicarán las instrucciones para manejarlo).

En la gráfica se ve la recta m. Decido qué es AB con respecto de m y qué son A y B con relación a AB.

Comparto mi opinión con un compañero.

B

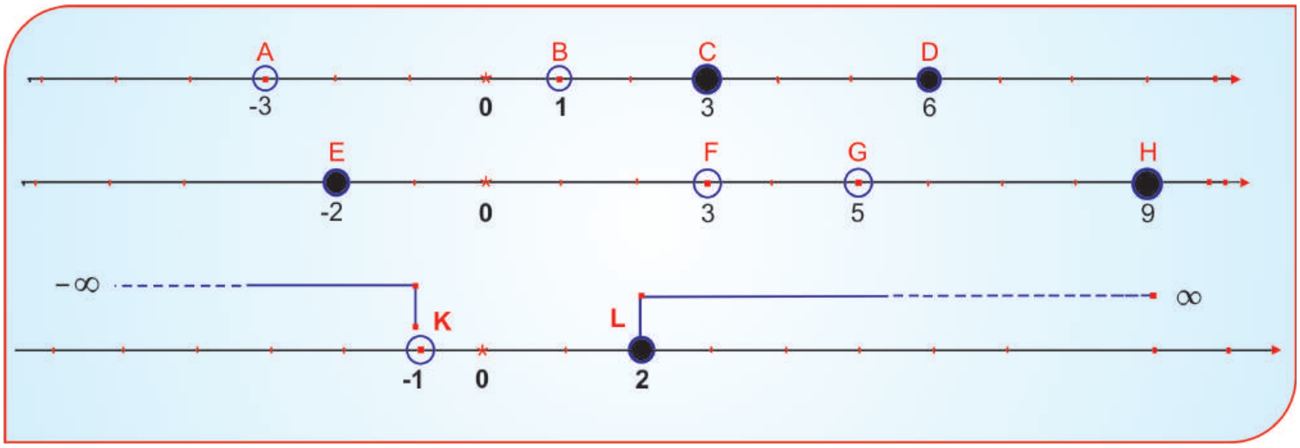
Leo, interpreto, interiorizo y anoto en el cuaderno lo que aparece en el recuadro verde y si es necesario ilustro con gráficas.

En la guía anterior describimos la recta real y vimos que en ella se pueden representar los números reales, asociando a cada uno de los infinitos puntos de la recta un número real y, recíprocamente, a cada número real haciéndole corresponder un punto.

Así como los diagramas de Venn-Euler fueron elaborados con una herramienta tecnológica como el computador, usando la aplicación Paint.

Con los compañeros de subgrupo consultamos si esos mismos diagramas los podemos hacer utilizando otro tipo de aplicaciones tecnológicas. Los construimos y explicamos qué herramientas se utilizaron.

Igualmente, aprovechando el desarrollo del tema sobre intervalos, su unión e intersección, aprovechamos para hacer uso del computador como herramienta tecnológica en la solución de algunos ejercicios.



Empezamos la guía indagando si los INTERVALOS son ¿música? ó ¿tiempo? ó ¿geometría? Pues, sí: la distancia que separa dos sonidos es un intervalo; las eras geológicas están separadas por intervalos enormes de tiempo, como el oligoceno que duró un intervalo de 15 millones de años; y son geometría, como lo veremos a continuación.

En la figura se observan dos ejes reales en los que se han señalado los puntos A, B, C, D, E, F, G y H. En todos los casos se colocó debajo de cada letra la abscisa (distancia desde el origen O hasta el punto correspondiente). Sobre las rectas se visualizan entonces segmentos ("pedazos" bien definidos de la recta) como $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$ y $\overline{GH}$. Segmentos como esos representan INTERVALOS. Por tanto: Los INTERVALOS son subconjuntos de la recta real que geométricamente corresponden a segmentos de recta.

Los puntos que determinan cada segmento son los extremos del intervalo y deben leerse siempre de izquierda a derecha. Por ejemplo, los extremos del intervalo AB son los puntos cuyas abscisas son −3 y 1, respectivamente, y los extremos del intervalos CD son los puntos de abscisas 3 y 6 respectivamente. Si nos fijamos en la primera recta, se observa que los puntos A y B (-3 y 1) no le pertenecen al intervalo, lo que se muestra colocando circunferencias en esos extremos; en cambio,_C y D (3 y 6) le pertenecen al intervalo, lo que se indica dibujando círculos en lugar_de circunferencias. En la segunda recta, para el intervalo EF se incluye la E (-2) y se excluye F (3); para el GH se excluye G (5) y se incluye H (9).

Eventualmente, los intervalos pueden corresponder a semirrectas como se muestra en la tercera recta de la gráfica anterior y corresponden a intervalos INFINITOS, así llamados porque uno de sus extremos se extiende a $-\infty$ ó a $+\infty$.

CLASES DE INTERVALOS

El hecho de que en los intervalos se incluyan o se excluyan los extremos permite clasificarlos y describirlos de acuerdo con la siguiente convención: si el extremo se incluye se dibuja un corchete al derecho y si se excluye, un corchete al revés (notación propia de intervalos), así:

1. Abiertos: cuando no se incluyen los extremos. Por ejemplo, AB que se denota por AB =]-3,1[

2. Cerrados: cuando se incluyen los dos extremos. Por ejemplo CD que se escribe como: CD = [5,9]

3. Semicerrados o semiabiertos: cuando incluyen un extremo y excluyen el otro. Por ejemplo, CF es cerrado a la izquierda y se simboliza por CF = [-2,3[y el GH es abierto a la izquierda y se indica por GH =]5,9].

Como entre los extremos de un intervalo existen infinitos números reales, es útil introducir la nomenclatura conjuntista, que consiste en llamar x a cualquier real comprendido entre los dos extremos, escribirlo entre dos minorantes y anotar antes y después de ellos los valores menor y mayor (en ese orden), respectivamente. Para los intervalos que se muestran en la gráfica, se tiene:

AB ={$-3 < x < 1$}, que se lee " x es mayor que –3 y x menor que 1". Note que la lectura se hace del centro hacia los lados y que en la desigualdad no se cumple la propiedad simétrica (o recíproca): si $a<b$ entonces $b>a$.

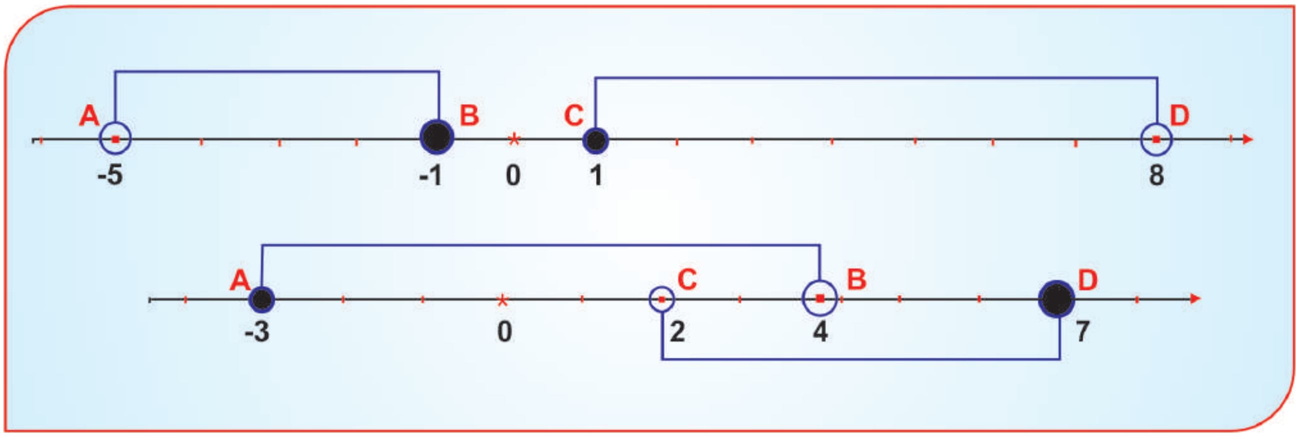
CD = {$3\leq x \leq 6$}, que se lee " x es mayor ó igual que 3 y x menor ó igual que 6".

EF = {$-2\leq x <3$}, que se lee " x es mayor ó igual que –2 y x menor que 3".

GH = {$5< x \leq 9$}, que se lee " x es mayor que 5 y x es menor ó igual que 9".

Para los dos intervalos infinitos es: {$-\infty< x <-1$} ("x es mayor que $-\infty$ y x es menor que –1"); {$1\leq x <\infty$} ("x es mayor ó igual que 1 y x es menor que $-\infty$").

LA UNIÓN Y LA INTERSECCIÓN DE INTERVALOS



Sean los intervalos AB y CD que se muestran en las figuras, en donde los conjuntos colocados en la recta de arriba son disyuntos (no tiene elementos comunes) y los de la recta de abajo son secantes (tienen elementos comunes). La unión de dos conjuntos está conformada por todos los elementos de los dos conjuntos:

Para los disyuntos: $AB \cup CD$ se tiene:

$]-5,-1] \cup [1,8[$ o también: $\{-5 \leq x \leq -1\} \cup \{1 \leq x < 8\}$ (la operación queda indicada)

Para los secantes: $AB \cup CD = AD$, o sea:

$[-3,4[\cup]2,7] = [-3,7]$ o también: $\{-3 \leq x < 4\} \cup \{2 < x \leq 7\} = \{-3 \leq x \leq 7\}$

Si en las mismas figuras deseamos calcular la intersección, buscamos los elementos comunes a los dos conjuntos.

Para los disyuntos: $AB \cap CD$ se tiene:

$]-5,-1] \cap [1,8[= \{ \ \}$ (es conjunto vacío porque no hay elementos comunes).

También: $\{-5 < x \leq -1\} \cap \{1 \leq x < 8\} = \{ \ \}$.

Para los secantes: $[-3,4[\cap]2,7] = [-3,7] \quad]2,4[$ (los elementos comunes).

También:

$\{-3 \leq x < 4\} \cap \{2 < x \leq 7\} = \{2 < x < 4\}$

Vamos a la sala de computadores con el objetivo de desarrollar de modo práctico lo que se indica a continuación.

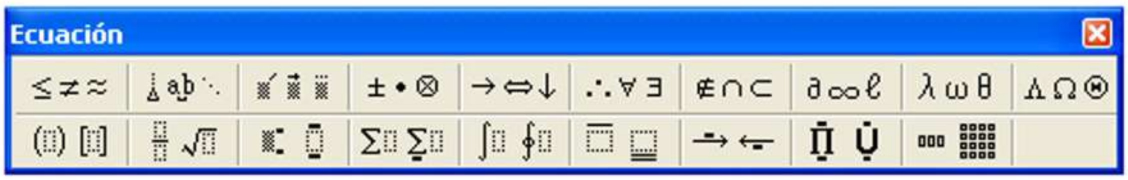
Como frecuentemente se deben presentar trabajos, informes, entre otros, es útil, por estética y comodidad, saber manejar el editor de ecuaciones de Word, a continuación se presentan las instrucciones que permiten manejar eficientemente esa herramienta tecnológica. Con esta actividad esperamos aprender a escribir con el editor de Word expresiones matemáticas.

Cómo acceder al editor: se entra a WORD; se pulsa en: herramientas, personalizar, comandos, insertar. En la ventana de la derecha, y usando el botón de desplazamiento vertical, se ubica el **Editor de Ecuaciones**, que tiene a su izquierda un icono con una raíz cuadrada de la letra griega alfa. Con clic sostenido se arrastra el icono hasta la barra de menús de WORD (en la parte de arriba), pues sería muy dispendioso estar abriendo el Editor desde su ubicación original.

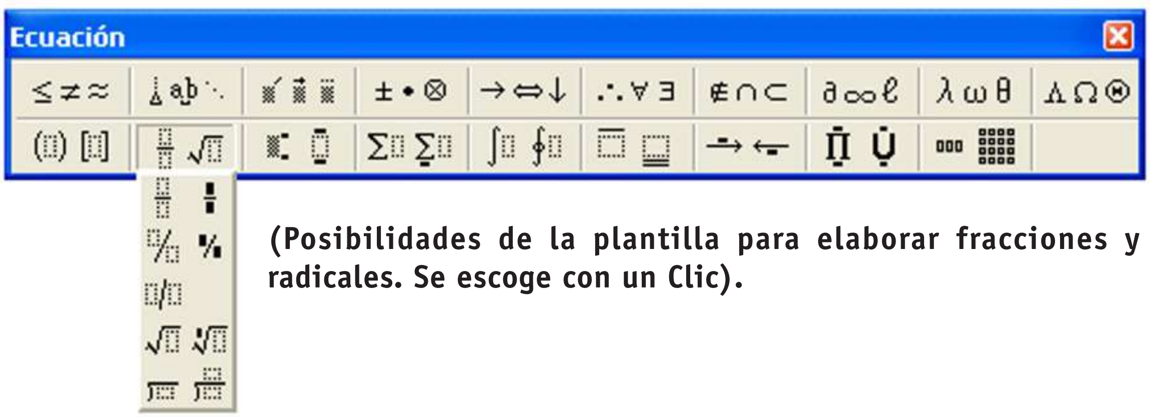
En el siguiente dibujo se muestran algunos elementos del editor:

 **(Icono del editor de ecuaciones)**

 **(Caja de Texto en donde se ve el cursor intermitente)**



(Barra de Menús: Desde la franja azul se puede arrastrar la barra para colocarla en el lugar deseado. En las otras dos franjas hay 19 opciones que se activan dando clic en la que se desee. La descripción de cada opción se puede visualizar apuntando a cada rectángulo).



(Posibilidades de la plantilla para elaborar fracciones y radicales. Se escoge con un Clic).

Cómo empezar a trabajar con el editor: se ubica el cursor en la hoja de trabajo, se pulsa en el icono del Editor que ya está colocada en la barra de menús; aparece una cajita de texto con el cursor intermitente y la barra de menús del Editor. Desde la franja azul la barra se puede arrastrar a una parte adecuada de la hoja de trabajo; las otras dos franjas están divididas en 19 rectángulos que contienen las opciones de la barra de menús del Editor, cuya descripción se visualiza colocando en cualquiera de los rectángulos el puntero del mouse.

Si se pulsa en cualquiera de las opciones, se despliega una ventana vertical con las posibilidades de cada una y con otra pulsación se selecciona la que se requiera. Realizada esta acción, dentro de la caja de texto aparecerán ciertos elementos, acordes con la selección hecha.

Las expresiones que se van a construir se van digitando desde el teclado y la ubicación del cursor se logra mediante las flechas de dirección: arriba, abajo, a la derecha, a la izquierda, de acuerdo con los requerimientos. Para finalizar la entrada se pulsa por fuera de la caja de texto.

Un ejemplo aclara conceptos: sea la expresión: $\dfrac{3x^5 - 2\sqrt{x^2 + y}}{y + x^{\frac{3}{4}}}$

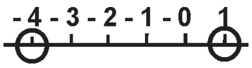
Se entra al Editor; como la expresión general es una fracción, se pulsa en el segundo rectángulo de la segunda fila y luego pulsa en la primera opción (en la caja de texto aparecen dos cuadritos separados por un segmento horizontal); digitamos 3x, pulsamos en el tercer rectángulo de la segunda fila, opción 1 (colocar un exponente), digitamos el 5; se pulsa flecha a derecha (para bajar el cursor), se digita -2, pulsamos en el segundo rectángulo de segunda fila, opción 4 (raíz cuadrada); se digita x, clic en el tercer rectángulo de la segunda fila, opción 1, se digita el 2 exponente, flecha a la derecha, se digita y; dos veces flecha abajo (para que el cursor se pase al denominador de la expresión). De modo similar se digita el denominador. Luego se pulsa la flecha a la derecha de modo que el cursor parpadeante aparezca al final de la expresión. Se pulsa por fuera de la caja de texto para terminar el proceso. Se debe practicar un poco para familiarizarse con el editor.

Cómo modificar o corregir una expresión: si se desea editar la expresión para hacer correcciones, se da un doble pulso, el editor se abre, se hacen las modificaciones y se finaliza pulsando por fuera de la caja de la caja de texto. Si se desea aumentar el tamaño de la expresión, se selecciona, se apunta al vértice inferior derecho y cuando aparezca una doble flecha inclinada se sostiene la pulsación y se arrastra el mouse.

LA CLONACIÓN CON EL COMPUTADOR

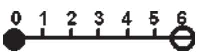
La primera gráfica que ilustra esta guía es un montaje cuyas partes se obtuvieron mediante “fotos” tomadas con el computador. ¿Sabe como se toma una “foto” con el computador? Muy sencillo: haga aparecer en la pantalla el dibujo que desee (puede buscarlo en internet o en imágenes prediseñadas o en una enciclopedia como ENCARTA...) y pulse la tecla “impr Pant Pet Sis” que aparece al lado de la tecla de retroceso. Abra ahora PAINT o un programa similar y pulse Edición, Pegar de la barra de menús: aparecerá un clon de lo que tenía en la pantalla y podrá seleccionar la porción que le interesa y pegarla donde quiera: en el mismo Paint, en Word....

Para clarificar los conceptos, se plantean y resuelven algunos ejercicios relativos a intervalos. Revise las soluciones dadas y ante cualquier dificultad que no pueda resolver por sí mismo intente aclararla con el subgrupo y en última instancia con su profesor.
Clasificar y describir cada intervalo usando la notación de intervalos y la notación de conjuntos:

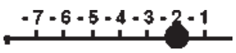


Solución: $]-4,1[$; $\{-4 < x < 1\}$ (por ser intervalo abierto)

Solución: $[-7,2]$; $\{-7 \leq x \leq 2\}$ (por ser intervalo cerrado)



Solución: $[0,6[$; $\{0 \leq x < 6\}$ (por ser cerrado a izquierda)



Solución: $]-\infty,-2]$; $\{-\infty, \angle x \leq -2\}$ (por ser cerrado a derecha)

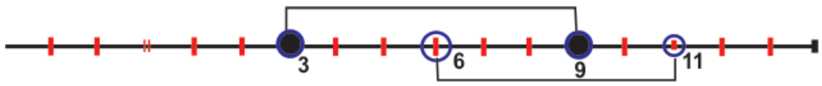
Escribir en notación de intervalos y en notación de conjuntos:

Los reales x menores que 4. Solución. $]-\infty,4[$; $\{-\infty < x < 4\}$

Los reales x que distan menos de 2 unidades de 3. Solución: $]-1,5[$; $-1<x<5$

Los reales x no menores que –4 pero menores o iguales que 6: $[-4,6]$; $\{-4 \leq x \leq 6\}$

Dibujar sobre una misma recta real los intervalos [3,9] y]5,11[y luego calcular la unión y la intersección, dando el resultado en las dos notaciones.



[3,9] $\cup$]5,11[= [3,11[= {3 $\leq$ X < 11} (Elementos de los dos intervalos)

[3,9] $\cap$]5,11[=]5,9] = {5 < X $\leq$ 9}

¿Cómo voy progresando? Resuelvo en mi cuaderno las siguientes actividades, comparo mis respuestas con las de un compañero, nos ponemos de acuerdo y presentamos un informe al Profesor. (Si es posible, uso el editor de ecuaciones).

1. Describo por extensión, es decir, nombro los elementos que conforman cada conjunto:

A = $\{x \,/\, x - 4 = 0,\ x \in N\}$
B = $\{x \,/\, x + 2 = 0,\ x \in N\}$
C = $\{x \,/\, x^2 - x - 6 = 0,\ x \in Q\}$
D = $\{x \,/\, 6x^2 + 9 = 0,\ x \in R\}$

2. Represento en la recta real los siguientes intervalos y los describo en las dos notaciones (propia de intervalos y conjuntista):

]0,10[

[-2, ∞ [

]-∞,5[

[$-\pi$, $\sqrt{2}$]

3. Represento cada par de intervalos en la recta real, calculo la unión y la intersección entre ellos y doy el resultado en las dos notaciones:

] 1,4] y] 3,7[

[6,10] y [6,8[

] 2,6 [y [3,10]

]-∞,5] y [-10,8[

Como aplicación del tema tratado a la vida cotidiana, leo, interpreto y desarrollo lo siguiente:

De acuerdo con la legislación vigente, una empresa (con justa causa) puede cancelar el contrato laboral a uno de sus empleados que haya trabajado en forma continua por un periodo de “más de 5 años y menor de 10 años”, pero debe indemnizarlo con “45 días y 20 más por año subsiguiente al primero y proporcionalmente por fracción”.

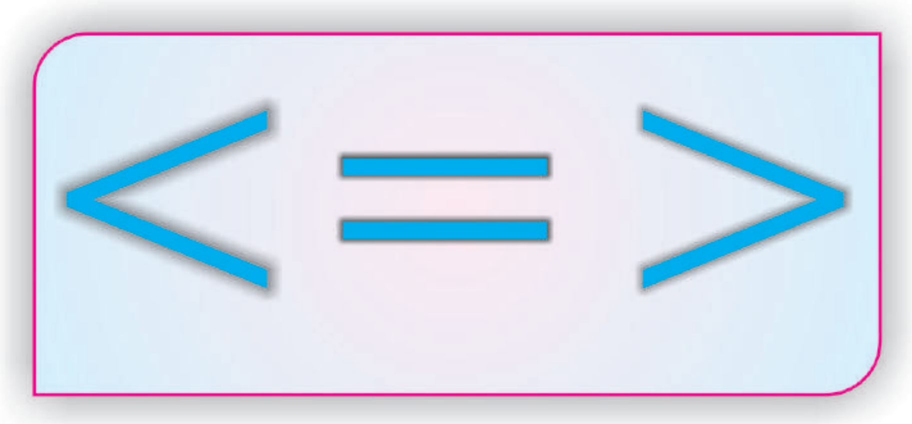
a) Expreso en intervalos el tiempo a que se refiere la norma.

b) Si los días de indemnización se pagan de acuerdo con el salario mínimo legal vigente (SMLV), describo un intervalo que ilustre la situación de un trabajador que haya laborado 5 años y 1 mes y otro que se haya desempeñado durante 9 años y 11 meses.

ESTUDIO Y ADAPTACIÓN DE LA GUÍA

GUÍA 3

LAS INECUACIONES
¿PARA QUÉ SIRVEN ESTOS SÍMBOLOS DE RELACIÓN?



INDICADORES DE LOGROS

- Define la desigualdad y establece sus propiedades.
- Aplica correctamente las propiedades de las desigualdades para resolver inecuaciones lineales con una variable, interpreta gráficamente la solución y la expresa en forma de intervalo.
- Resuelve con propiedad inecuaciones con una variable de grado superior a 1, interpreta gráficamente la solución y la expresa en forma de intervalo.
- Define el valor absoluto de una variable, establece sus propiedades y las aplica para resolver ecuaciones e inecuaciones que contienen valor absoluto.
- Demuestra interés por actualizar su información de manera constante. (GESTIÓN DE LA INFORMACIÓN).
- Identifica la información requerida para ampliar su conocimiento de una situación o problema.
- Ubica las distintas fuentes de información disponibles.
- Recoge organizadamente la información.
- Analiza la información recolectada.
- Utiliza la información para tomar decisiones y emprender acciones.
- Reconoce la información resultante de la experiencia de otros.
- Organiza y archiva la información recolectada.

En esta unidad, nos adentraremos también en la competencia laboral general **Gestión de la Información** que se define como “la capacidad de recolectar información pertinente con el fin de procesarla, interpretarla y utilizarla para resolver situaciones”.

En el mundo actual es cada vez mayor el flujo de información y de allí la necesidad de establecer nuevos canales de comunicación y aprendizaje que faciliten el acceso a la información disponible y permitan una mejor apropiación de la misma.

Estemos, pues, pendientes de las sugerencias y actividades propuestas en la guía y que se refieren a esta competencia.

A

Para adentrarse en el estudio de los conceptos escritos en la guía, es preciso revisar y afianzar algunos elementos ya vistos. Por tanto desarrollamos las cuestiones que se plantean.

Antes de iniciar se debe nombrar un coordinador de mesa que se encargará de:

- Moderar el uso de la palabra.
- Hacer que todos los integrantes participen en las discusiones, aportando ideas.
- Dirigir el trabajo, leyendo y ejecutando las instrucciones.
- Asesorar la elaboración y presentación adecuada de las conclusiones como una forma de organizar información.

1. Resolver en el cuaderno los siguientes ejercicios:
1. Factorizar:
   a) $X^2 - Y^2$
   b) $9a^2 - 4b^2$
   c) $ax + ay$

d) $4a^2b + 2ab - 6ab^2$

e) $x^2 + 2x - 3$

f) $2x^2 + 5x - 3$

2. Resolver las ecuaciones lineales:

a) $3x - 6 = 2x + 1$

b) $\frac{1}{2}x - \frac{2}{3} = \frac{3}{4}x + \frac{1}{12}$

Comparemos y discutamos las soluciones que encontramos entre los diferentes subgrupos, nos ponemos de acuerdo y presentamos las inquietudes al profesor con el fin de aprovechar la información que aportaron otros, con su experiencia.

Si se requiere, repasamos factorización y ecuaciones, acudiendo a cualquier fuente que ofrezca la información que necesitamos.

Hemos ubicado números reales en la recta numérica y hemos operado con intervalos como $a<b<c$ (se lee “b mayor que a y b menor que c”). Haremos ahora un estudio más exhaustivo de los símbolos de relación “<” y “>”.

B

Leo, analizo y me apropio de los conceptos que aparecen abajo. Así mismo consigno en mi cuaderno los elementos que aparecen en el recuadro verde. Si lo requiero copio también los ejemplos.

Podemos comprobar que, geométricamente, un número real **“a”** es mayor que otro real **“b”** si en la recta real el punto asociado a **“a”** está a la derecha del punto asociado a **“b”**. Algebraicamente, **“a”** es mayor que **“b”** siempre y cuando la diferencia entre **“a”** y **“b”** sea un número real positivo, lo que se expresa simbólicamente así:

$$a>b \Leftrightarrow (a-b) \in R^+$$

Por ejemplo: 7 > 3 porque 7 - 3 = 4 que es un real positivo.
-5 > -8 porque -5 - (-8) = -5 + 8 = 3 que es un real positivo

Expresiones como las planteadas en los dos ejemplos se llaman DESIGUALDADES.

PROPIEDADES DE LAS DESIGUALDADES

$a > b \Longleftrightarrow b < a$ (propiedad antisimétrica)

Si $a > b \Longrightarrow a + c > b + c, \forall c \in R$ (propiedad monotónica de la suma)

Si $a > b \Longrightarrow a * c > b * c, \forall c \in R^+$ (propiedad monotónica del producto)

Si $a > b \Longrightarrow a * c < b * c, \forall c \in R^-$ (propiedad antimonotónica del producto)

INECUACIONES

Se llama **INECUACIÓN** a una desigualdad en la que hay por lo menos una variable. Por ejemplo: $x + 2 > 3$; $X^2 > -4$; $X^2 + Y^2 \leq 16$

RESOLVER una inecuación es calcular el intervalo dentro del cual la variable toma valores que la satisfacen. Así, el conjunto solución de $x + 2 > 5$ es $]1,\infty[$ y el de $X^2 > -4$ es el conjunto de los reales.

¿Por qué? Compare su respuesta con las de otros compañeros.

Para resolver inecuaciones lineales basta aplicar las propiedades de las desigualdades que son muy similares a las de las igualdades en la solución de ecuaciones, pero cuidándose de usar correctamente la propiedad antimonotónica. Por ejemplo, hallar el conjunto solución $x + 2 < 7$. Si se suma -2 a los dos miembros, resulta $x + 2 - 2 < 5 - 2$ (monotónica de la suma). Luego, $x < 3$ y entonces el conjunto solución es $]-\infty, 3[$, lo que significa que cualquier valor de x que le pertenezca al intervalo satisface la inecuación.

Otro ejemplo: resolver la inecuación $3 - 2x > x + 9$. Si sumamos a los dos lados $-3 -x$, queda: $3 - 2x -3 -x > x + 9 -3 -x$ (Propiedad monotónica de la suma). O sea $-3x > 6$. Si multiplicamos los dos miembros por -1, resulta $3x < -6$ (propiedad antimonotónica del producto). Luego $x < -2$. Por tanto, el conjunto solución es el intervalo $]-\infty,-2[$ y significa que cualquier valor de x que le pertenezca al intervalo, satisface la inecuación.

Otro ejemplo: resolver la inecuación $-10 \leq 2x -4 \leq 2$. Como aparece una doble inecuación, pues se lee del centro hacia los lados, trasladamos el -4, tanto a la izquierda como a la derecha (pasa positivo) $-10 + 4 \leq 2x \leq 2 + 4 \Rightarrow -6 \leq 2x \leq 6 \Rightarrow -3 \leq x \leq 3$. Luego la solución es el intervalo $[-3,3]$.

Inecuaciones de grado superior a uno

La solución de inecuaciones de grado superior a 1 se realiza efectuando una transformación de la inecuación en otra equivalente que sólo contenga factores lineales variables que deben compararse con cero.

Por ejemplo, hallemos el conjunto solución de $X^2 < 6 - X$

$X^2 + X - 6 < 0$ (comparando con 0)

$(x + 3)(x - 2) < 0$ (Transformamos a factores lineales)

Como cada factor variable puede ser positivo o negativo, el producto será negativo (menor que 0) cuando los factores tengan signos contrarios, es decir, existen dos posibilidades:

a) El producto es negativo cuando $x + 3 > 0$ y $x - 2 < 0$; ó

b) El producto es negativo cuando $x + 3 < 0$ y $x - 2 > 0$;

Si se resuelven las inecuaciones de la primera posibilidad y hallamos su intersección (observe que el conectivo utilizado es y, que es equivalente a la intersección entre conjuntos), encontramos una solución parcial S1.

Si se resuelven las inecuaciones de la segunda posibilidad y calculamos su intersección, hallaremos otra solución parcial S2.

Debido al conector ó que liga las dos posibilidades, la solución general S es la UNIÓN de las de las dos soluciones parciales. O sea:

a) x + 3 > 0 ⇒ x > - 3 ∧ x - 2 < 0 ⇒ x < 2, cuya intersección es S1 =]-3,2 [

b) x + 3 < 0 ⇒ x < - 3 ∧ x - 2 > 0 ⇒ x > 2, cuya intersección es S2 = { }

Finalmente, $S = S1 \cup S2 = \left]-3,2\right[\cup \{\ \} = \left]-3,2\right[$ que es la solución, como puede comprobarse tomando algunos valores que estén en el intervalo solución y reemplazarlos en la inecuación original.

Método alternativo: se expresa la inecuación como un producto de factores lineales que se comparan con cero, igual que en el primer método. Se toman las dos opciones de ser positivo o negativo que tiene cada factor lineal variable, se resuelven las inecuaciones resultantes y se traslada el resultado al eje real, para finalmente determinar los signos del producto en los diversos intervalos en que queda dividido el eje real, así:

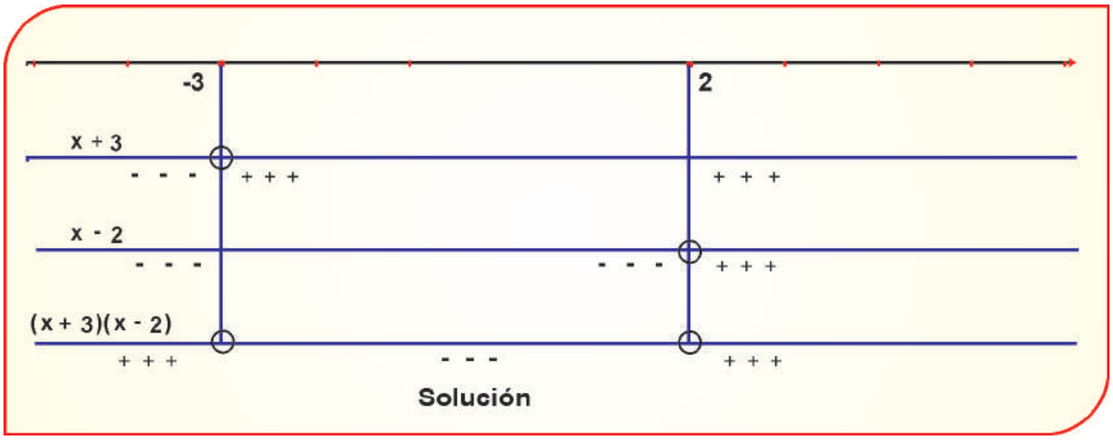
$X^2 + X - 6 < 0$

(x + 3)(x - 2) < 0 (Condición: el producto debe de ser negativo)

Para x + 3; x + 3 > 0 ⇒ x > -3
X + 3 < 0 ⇒ x < -3

Para x - 2; x - 2 > 0 ⇒ x > 2
X - 2 < 0 ⇒ x < 2

Para interpretar geométricamente los resultados, trazamos un eje real y ubicamos los valores de x que anulan cada factor: -3 y 2. Por dichos puntos bajamos verticales al eje para visualizar los intervalos en que queda dividido. Luego se trazan paralelas al eje, una por cada factor y otra por el producto; se escriben los signos que toma cada factor en los diversos intervalos; por último se determinan los signos del producto y se seleccionan los intervalos que cumplan con la condición establecida:



Observe que el factor X + 3 es positivo (tiene signo +) cuando x sea mayor que -3 (a la derecha de -3); el mismo factor x + 3 es negativo (tiene signo -) cuando x sea menor que -3.

De modo similar, el factor x - 2 es positivo cuando x sea mayor que 2 y es negativo cuando x sea menor que 2.

Para el signo del producto basta multiplicar los signos de los factores en los diversos intervalos. Como la condición es que el producto sea negativo, sólo se cumple en el intervalo]-3,2[que es la solución.

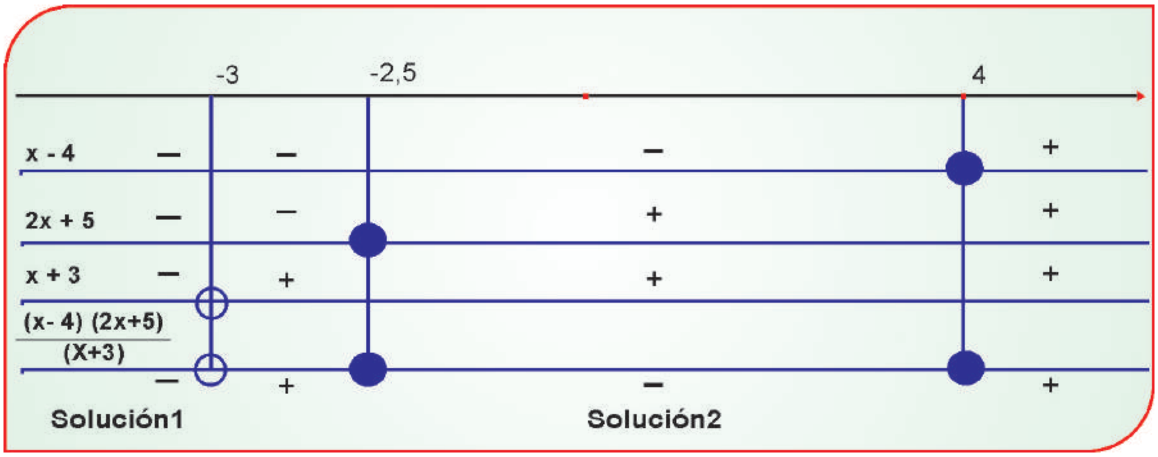
Resolver la inecuación $\frac{2x^2 - 3x - 20}{x+3} \leq 0$. Si se factoriza el numerador, queda: $\frac{(x - 4)\ (2x + 5)}{x+3} \leq 0$. Si planteamos las posibilidades para los tres factores, se tiene:

$x - 4 \geq 0 \Rightarrow x \geq 4 \ ;\ x - 4 < 0 \Rightarrow x > 4$

$2x + 5 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{5}{2} \ ;\ 2x + 5 < 0 \Rightarrow x < -\frac{5}{2}$

$x + 3 > 0 \Rightarrow x > -3;\ x + 3 < 0 \Rightarrow x < -3$

Si se trasladan estos resultados al eje real, resulta: $X - 4 \geq 0$



$x - 4$ es positivo cuando x sea mayor ó igual que -4 y $x - 4$ es negativo cuando x sea menor que 4.

$2x + 5$ es positivo cuando x sea mayor ó igual que $- 2.5$ y $2x + 5$ es negativo cuando x sea menor que -2.5.

$x + 3$ es positivo cuando x sea mayor que -3 (note que x no puede ser igual a $- 3$, porque el denominador sería igual a 0 y esta operación no está definida en matemáticas) y $x + 3$ es negativo cuando x sea menor que -3.

Para calcular el signo de la operación $\frac{(x - 4)\ (2x + 5)}{x+3} \leq 0$, basta multiplicar los signos de los factores en los diversos intervalos, y como la condición es que el cociente sea "negativo" (menor o igual que cero), hay dos intervalos que la cumplen. Luego, la solución es $]-\infty, -3[\cup \left[-\frac{5}{2}, 4\right]$, como se puede comprobar tomando algunos valores de x que le pertenezcan a esos intervalos.

Valor absoluto: el valor absoluto de un número real es el módulo del real, pero tomado siempre positivo. El valor absoluto se indica escribiendo el real entre dos barras, así:

$$|+5| = 5; |-5| = 5; |\pm 3.8| = 3.8$$

Como se ve, existen siempre dos números reales que son iguales en valor absoluto: son los opuestos.

PROPIEDADES DEL VALOR ABSOLUTO:

$|V| = K \Leftrightarrow -\pm V = K \Leftrightarrow V = -K \vee V = K$

$|V| < K \Leftrightarrow -K < V < k$

$|V| > K \Leftrightarrow V < -K \vee V > K$

Usemos las propiedades para hallar el conjunto solución de:

$|2x-3| = 7 \Leftrightarrow 2x - 3 = \pm 7 \Rightarrow 2x = 3 \pm 7 \Rightarrow x = 5$ ó $x = -2$. Luego el conjunto solución es $S = \{-2, 5\}$

$|2x-3| < 7 \Leftrightarrow -7 < 2x - 3 < 7 \Rightarrow -7+3<2x<7+3 \Rightarrow -4<2x<10 \Rightarrow -2 < x < 5$. Luego el conjunto solución es $S = \{\,]-2,5[\,\}$.

$|2x-3| > 7 \Leftrightarrow 2x-3 < -7$ ó $2x-3 > 7 \Rightarrow 2x < -4$ ó $2x > 10 \Rightarrow x < -2$ ó $x > 5$.

Luego el conjunto solución es $S = \{\,]-\infty, -2[\,\cup\,]5,\infty[\,\}$

A continuación escribo y resuelvo en mi cuaderno los siguientes ejercicios. Me apoyo en los ejemplos resueltos, en los apuntes y en los conceptos de mis compañeros. Comparo las soluciones con las halladas por otros miembros del subgrupo. Estructuro un informe y lo comparto con mi profesor.

1. Clasifico los siguientes números, partiendo del conjunto más reducido al más amplio:

5 es ______________________________

$-\frac{3}{2}$ es ______________________________

$\sqrt{8}$ es ______________________________

$\sqrt[3]{-27}$ es ______________________________

3.81717... es ______________________________

2. Digo si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas y justifico mis respuestas:

- Todo natural es entero
- Todo real es racional
- Algunos reales son irracionales
- En los reales se pueden realizar todas las operaciones de la aritmética
- Cualquier subconjunto de los reales es un intervalo
- $\frac{a}{0}$ y $\frac{0}{0}$ son racionales
- Cualquier real se puede expresar como un desarrollo decimal

3. Resuelvo las siguientes inecuaciones y represento en la recta real el conjunto solución:

- $x - 5 > 0$
- $2x < 10$
- $3 - x > 16$
- $-3x > -15$
- $2x - 3 > 5$
- $2x + 5 > 3x - 8$

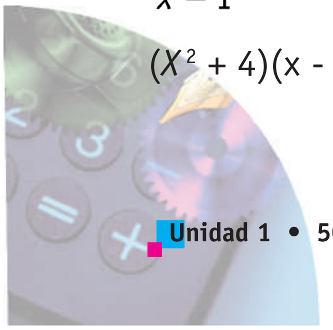
Para desarrollar los ejercicios 4, 5 y 6 se sugiere hacer un análisis de los métodos para resolver inecuaciones no lineales, propuestos en B, de tal modo que permita seleccionar el más práctico, mostrando su habilidad para gestionar.

4. Resuelvo las siguientes inecuaciones que contiene productos y cocientes, usando paralelas al eje real y doy las respuestas en intervalos:

$(x - 3)(x - 1) < 0$

$\frac{x-3}{x-1} < 0$ (¡cuidado! el denominador no puede ser cero)

$(X^2 + 4)(x - 5) > 0$



$(x^2 + 1)(x + 4) < 0$ (ver que el primer factor se puede suprimir por ser siempre positivo).

5. Resuelvo las siguientes inecuaciones dobles y doy la respuesta en intervalos:

$0 \leq 4x - 1 < 3$

$-3 < 3x + 4 \leq 6$

6. Resuelvo las inecuaciones no lineales usando las paralelas al eje real y doy la respuesta en intervalos.

$x^2 + 2x < 8$

$\dfrac{3x - 8}{2x + 3} < 4$

$x^2 \geq 3x + 28$

$2x^3 - 4x^2 < 48x$

7. Calculo:

$|8 - 12| =$

$|-7 - 7| =$

$||-5| - |3|| =$

$||-8| - 9| =$

8. Escribo sin el símbolo de valor absoluto y calculo el conjunto solución en:

$|x - 2| \leq 5$

$|1 - x| = 2$

$|7x - 15| = -4$

$|5 - 2x| \geq 3$

$|x - 6| < 4$

D

El éxito en el proceso de aprendizaje se da, en la medida en que se alcancen los logros propuestos. Si he desarrollado las guías de la manera sugerida, podré aplicar mis conocimientos en la solución de situaciones que frecuentemente se nos presentan, pues debo tener en cuenta que seré yo mismo el primer beneficiado. Si tengo dificultades, trataré de superarlas apoyándome en los recursos de que dispongo.

a. Escribo la desigualdad correspondiente entre:

- Mi edad y la de mi padre.
- Mi edad y la de mi compañero.

b. ¿Qué signo pondría entre el área del recinto de mi casa y el de mi colegio?

c. Expreso algebraicamente todos los números mayores que 3 y los represento en la recta real.

d. Expreso los números mayores que 3, pero que no sobrepasen a 7 y los represento en la recta numérica.

e. En una familia de tres hijos, el padre da dinero a los hijos según su edad. Al mayor le da $2000 y al menor $500. Si Pablo es el mediano, ¿qué puedo decir del dinero que recibe?

f. Elaboro una inecuación en la que estén incluidas las edades de todos los compañeros de mi grupo. ¿Qué información debo recolectar?

g. Dados los intervalos AB cuyos extremos son -8 y 2, abierto y CD cuyos extremos son -1 y 6, cerrado, los represento geométricamente en el mismo eje real y luego:

- Expreso cada intervalo en notación de intervalos.
- Expreso cada intervalo en notación de conjuntos.
- Calculo su unión y doy la respuesta en las dos nomenclaturas.
- Calculo su intersección y doy la respuesta en las dos nomenclaturas.

h. En la siguiente demostración determino en dónde está el error que permite llegar a un absurdo.

$a = b$

$a^2 = ab$

$a^2 - b^2 = ab - b^2$

$(a + b)(a - b) = b(a - b)$

$a + b = b$

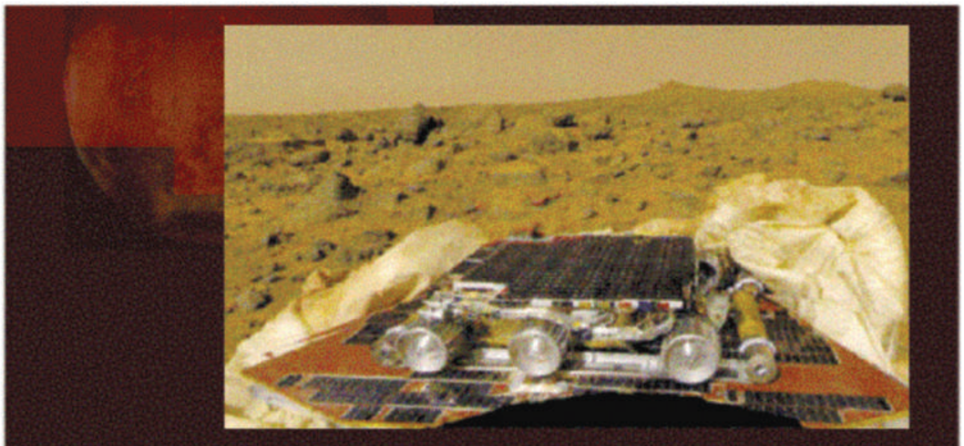
$2b = 1b$

$2 = 1$

ESTUDIO Y ADAPTACIÓN DE LA GUÍA

UNIDAD 2

¿QUÉ ES Y CÓMO OPERA LA RELACIÓN FUNCIONAL?



*"**Aquí Marte. Aterrizamos** sin novedad". Primera imagen que transmitió el Pathfinder para avisar que llegó con bien y de paso transmitir la buena noticia de que el lugar de aterrizaje está sembrado de rocas, como esperaban los científicos.*

Así como el robot PATHFINDER construido por la NASA inició la exploración marciana, nosotros también daremos los primeros pasos en el fascinante mundo del cálculo infinitesimal.

LOGROS DE LA UNIDAD:

- Utiliza con propiedad elementos de matemáticas ya estudiados.
- Define una relación matemática y la describe, tanto por extensión como por comprensión y define su dominio y su rango.
- Identifica cuándo una relación es función, bien sea algebraica ó gráficamente.
- Calcula analíticamente el dominio y el rango de relaciones y funciones.
- Define una sucesión, calcula cualquier elemento de ella y usa el resultado para clasificarla.
- Establece y maneja el concepto de límite, tanto de sucesiones como de funciones, establece sus propiedades y las usa para el cálculo del límite (cuando existe).
- Evalúa y compara sus procesos con otros similares para innovar y mejorar. (REFERENCIACIÓN COMPETITIVA).
- Analiza algunos conceptos que refuercen sus relaciones familiares (EJE TEMÁTICO).
- Participa activa, responsable y colectivamente en el logro de objetivos comunes. (TRABAJO EN EQUIPO).

GUÍA 1

¿LAS RELACIONES SON SÓLO FAMILIARES?

INDICADORES DE LOGROS:

- Define y calcula una relación en A x B.
- Establece y calcula analíticamente el dominio y el rango de relaciones reales sencillas.
- Identifica cuándo una relación es función.
- Analiza instrumentos de evaluación, comparación y selecciona datos para tomar decisiones (REFERENCIACIÓN COMPETITIVA).
- Formula indicadores que permitan medir el desempeño de sus acciones.
- Aplica el ciclo PHVA a procesos de referenciación con otros.
- Reconoce procesos exitosos de otros.
- Identifica las debilidades de sus procesos y los compara con los de otros.
- Aprende y aplica en forma continua las mejores prácticas desarrolladas por otros.
- Asume una posición positiva al cambio, que permite ajustar sus prácticas habituales.
- Refuerza las relaciones familiares al compararlas con el concepto de relación matemática (EJE TEMÁTICO).

Antes de iniciar el desarrollo de la guía, leemos y comentamos lo enunciado a continuación.

Hoy por hoy, la globalización en todos los órdenes nos plantea el reto de ser abiertos al cambio, para tratar de superarnos continuamente, evaluando nuestro desempeño, comparándolo con el de otros y, si es preciso, reconocer que el suyo es más eficiente que el nuestro, procurando apropiarnos de elementos que nos permitan ejecutar nuestras tareas con éxito. Por tal razón, trataremos la competencia laboral general **Referenciación Competitiva** que se entiende como “el proceso de compararse y evaluarse continuamente con otros, para lograr identificar los mecanismos, procedimientos y prácticas que ayuden a tomar acciones para mejorar los desempeños”.

“Es una actividad de aprendizaje continuo y se adelanta a través de las etapas del ciclo gerencial básico: Planear, ejecutar, verificar y actuar”.

Estemos atentos a los conceptos y actividades que encontremos en la guía, relacionados con esta competencia.

También, tendremos en cuenta conceptos que tienen que ver con el mejoramiento de las relaciones familiares, pues “el hecho de pertenecer a una familia por un largo tiempo, además del grado de intimidad diaria de la que disfrutamos con ella, parecería ser garantía de relaciones armoniosas y estables entre todos sus miembros. Pero la realidad es otra. Las relaciones entre sus distintos miembros, llegan en ocasiones a constituirse en un problema bastante serio y preocupante, cuando no logramos establecer los vínculos afectivos que desearíamos con los demás. El convivir en armonía se ha constituido en todo un arte, que muchos de nosotros no cultivamos, en ocasiones por no considerarlo importante si al fin de cuentas a la familia hay que soportarla y punto; y otras veces por que no estamos dispuestos a destinarle el esfuerzo e interés que demanda una tarea así cuyos resultados quizá no son apreciables ni cuantificables pero que indudablemente van a enriquecer profundamente nuestra vida personal y emocional”. (Lic.Pilar Pacheco).

A

Con un compañero leemos, analizamos y respondemos la siguiente situación:
Hablando de vestirse, ¿es lo mismo "colocarse las medias y luego los zapatos" que "colocarse los zapatos y luego las medias"?

Escribimos otros ejemplos similares a éste y los discutimos.

Existen en nuestra cotidianidad muchas situaciones en las que deben realizarse acciones cuyo resultado depende del orden en que se ejecuten, similares al planteamiento inicial.

Supongamos que A = {1, 2, 3, 4} y B = { 1, 2, 5}.

Escribo en mi cuaderno el conjunto de pares ordenados (x, y), de modo que las primeras componentes "x" sean elementos de A y las segundas componentes "y" sean elementos de B. Comparo mi respuesta con la de un compañero y la discutimos hasta llegar a un acuerdo. Registramos además los pasos seguidos por cada uno en la solución del ejercicio, para definir cuál fue el más ágil y sencillo.

Si tiene dificultades o no logra resolver la actividad anterior, ¿Qué haría usted?

B

Leo y analizo los siguientes conceptos y consigno en mi cuaderno lo que aparece en el recuadro verde. Si lo requiero, elaboro las gráficas correspondientes. Si encuentro dificultades, busco la manera de allanarlas usando todos los recursos disponibles.

Sean los conjuntos A={1, 2, 3} y B={2, 4}. El producto cartesiano entre A y B se define así: A x B ={(x, y) / $x \in A \wedge y \in B$ }, que se lee " A cartesiano B" es el conjunto de los pares ordenados (x, y) tales que x le pertenece a A y y le pertenece a B. Para los conjuntos dados el producto cartesiano es:

A x B ={(1, 2), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 2), (3, 4)}.
B x A ={(2, 1), (2, 2), (2, 3), (4, 1), (4, 2), (4, 3)}. También:

A x A ={(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2,2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)}, es decir el cartesiano de un conjunto consigo mismo.

Se ve que $A \times B \neq B \times A$

Consideremos ahora los conjuntos:

$M = \{(x, y) \,/\, y = x\} \subset A \times B \Rightarrow M = \{(2, 2)\}$

$H = \{(x, y) \,/\, y = x + 1\} \subset A \times B \Rightarrow H = \{(1, 2), (3, 4)\}$

$K = \{(x, y) \,/\, x > y\} \subset A \times B \Rightarrow K = \{(2, 4), (3, 4)\}$

$L = \{(x, y) \,/\, x \neq y\} \subset A \times B \Rightarrow L = \{(1, 2), (1, 4), (2, 4), (3, 2), (3, 4)\}$

(Por la izquierda, los conjuntos están descritos por comprensión, es decir, se da la propiedad común que deben cumplir los elementos que lo conforman; por la derecha, los mismos conjuntos están descritos por extensión, o sea, se nombran todos y cada uno de los elementos que lo forman).

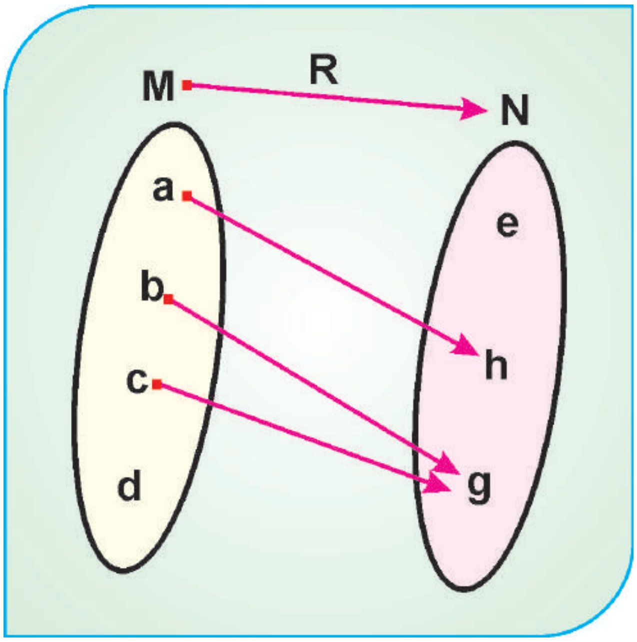
DEFINICIÓN: en matemáticas, una RELACIÓN es un subconjunto de un producto cartesiano. Por ejemplo, M, H, K y L son relaciones definidas en AxB.

DIAGRAMA SAGITAL: a veces conviene representar una relación por medio de flechas o sagitas, así:

En el diagrama, la relación descrita por extensión es R = {(a, h), (b, g), (c, g)}

M es el conjunto de SALIDA; N es el conjunto de LLEGADA.

DOMINIO DE UNA RELACIÓN: es el conjunto de las primeras componentes de las parejas (valores de x), es decir; $D_R = \{a, b, c\} \subseteq M$.



CODOMINIO o RANGO DE UNA RELACIÓN: es el conjunto de las segundas componentes de las parejas (valores de y), o sea: C_R ={h, g} $\subseteq$ N.

GRÁFICA CARTESIANA DE UNA RELACIÓN: son los puntos del plano que representan a las parejas que la integran.

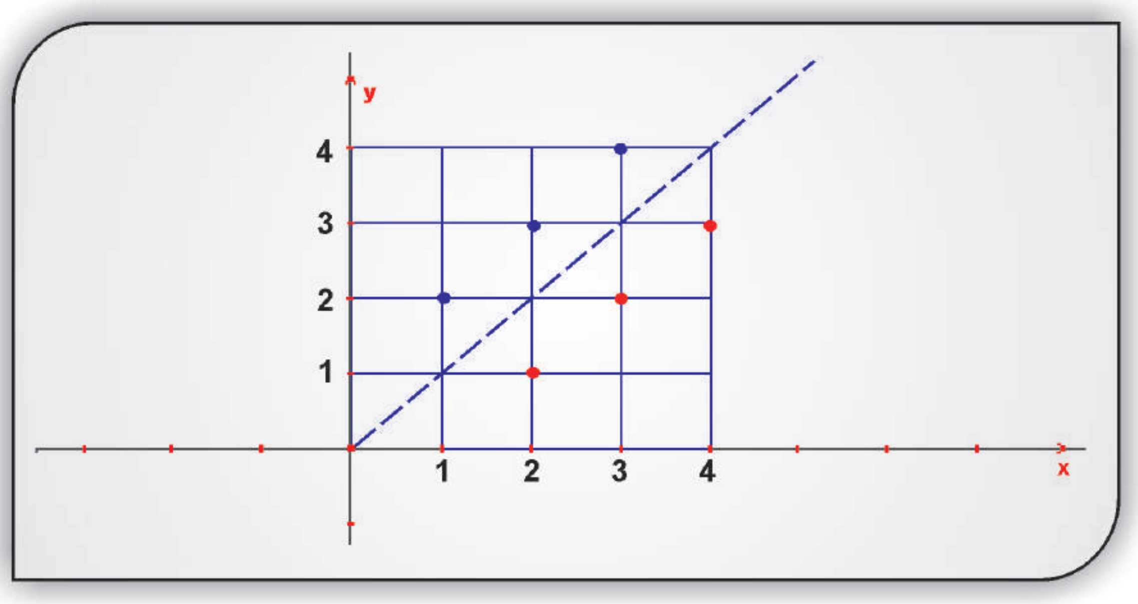
LA RELACIÓN INVERSA: Dada una relación R, su inversa R^{-1} es otra relación que resulta al intercambiar el dominio por el codominio en R y recíprocamente.
Ejemplo 1: R^{-1} ={(h, a), (g, b), (g, c)} es la relación inversa de R.

Ejemplo 2: dado el conjunto A = {1, 2, 3, 4} y la relación Q ={(x, y) / y = x - 1} $\subset$ A x A, calculemos por comprensión y por extensión su inversa. Igualmente, dibujemos las gráficas cartesianas de las dos relaciones en un mismo sistema coordenado.

Solución: Por extensión Q = {(2, 1), (3, 2), (4, 3)}, D_Q ={2, 3, 4} y C_Q ={1, 2, 3}.

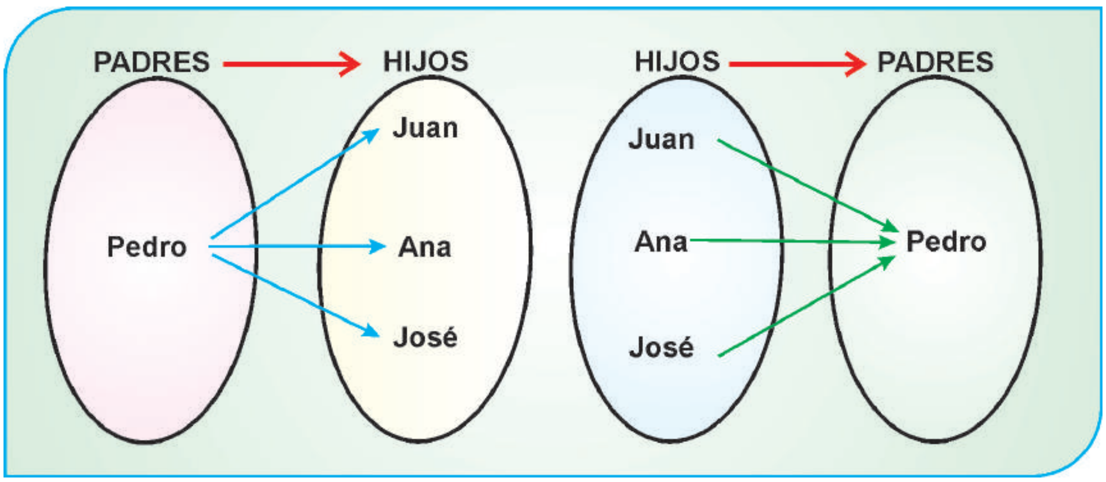
Por comprensión, la relación inversa es Q^{-1} = {(x, y) / x = y - 1}, porque para hallarla basta intercambiar el dominio y el rango: donde está "x" queda "y" y recíprocamente.

Por extensión la inversa es Q^{-1}={(1, 2), (2, 3), (3, 4)}, porque se intercambian el dominio y el rango.



Los tres puntos rojos son la gráfica cartesiana de Q y los tres puntos azules lo son de la relación inversa Q^{-1}. Obsérvese que resultan simétricos respecto de la bisectriz de los cuadrantes I y IV.

Pero, a propósito de la gráfica que encabeza la guía, las relaciones se pueden establecer no sólo en los números reales, sino en varias situaciones de nuestro entorno, como es el caso de las RELACIONES que pueden definirse con "elementos" de nuestra familia, como: "a es el padre de b", cuya inversa es "b es hijo de a", cuyas gráficas sagitales son:



Fuera del concepto de relación como "subconjunto de un producto cartesiano", las relaciones familiares deberán ser siempre cordiales, de comprensión, de ayuda mutua, pues la familia es realmente una sociedad en donde cada integrante debe recibir y aportarle a todos los integrantes, de acuerdo a las posibilidades y falencias de cada uno.

CÁLCULO DEL DOMINIO DE RELACIONES EN LOS REALES

Debido a que nuestro interés fundamental es trabajar con el conjunto de los números reales, veremos a continuación algunas relaciones definidas en ellos y que se denominan relaciones reales y que se denotan por R: $\Re \Rightarrow \Re$ (se lee relación R de reales contra reales).

A causa de que en una relación real la variable "Y" se expresa en términos de la variable "X", es preciso determinar los valores que puede tomar la "X" (DOMINIO), para que "Y" tenga un valor real.

Como en los reales están definidas todas las operaciones fundamentales, excepto LA DIVISIÓN ENTRE CERO Y LA EXTRACCIÓN DE RAÍCES PARES DE REALES NEGATIVOS, para calcular el DOMINIO se expresa "Y" a través de "X" y la expresión resultante se somete a las siguientes preguntas:

1) ¿Hay denominadores variables? Si la respuesta es afirmativa, se tomarán solamente los reales que NO anulen el denominador (NO SE PUEDE DIVIDIR POR CERO), y en el caso contrario se tomarán todos los reales.

2) ¿Hay raíces PARES de elementos variables? Si la respuesta es afirmativa, se tomarán SOLAMENTE los que hagan que el radicando sea un real positivo (NO SE PUEDE SACAR RAÍZ PAR A REALES NEGATIVOS). Finalmente se combinan las dos soluciones parciales para obtener el DOMINIO de la relación.

Ejemplo1: Hallar el dominio de la relación G={(x,y) / 2XY - 3Y + 5 = 0} $\subset$ R x R.

Solución: Despejamos Y : 2XY - 3Y = -5 $\Rightarrow$ Y(2X - 3) = -5 $\Rightarrow$ Y = $\dfrac{-5}{2X-3}$

1) ¿Hay denominadores variables? Si, porque el denominador es "2X - 3". Como no se puede dividir por cero, hacemos 2X - 3 = 0 y despejamos la variable para obtener X = $\dfrac{3}{2}$, valor que anula el denominador y por tanto debe descartarse.

Luego, por ahora, el DOMINIO son los reales diferentes de $\frac{3}{2}$.

2) ¿Hay radicales de grado par y radicando variable? No. Por tanto no hay ninguna restricción para los valores que toma "X" en esta pregunta.

   Luego el DOMINIO de G son los reales diferentes de 0, o sea: $D_G = \Re - \{\frac{3}{2}\}$

   Ejemplo2: Hallar el DOMINIO de H ={(x, y) / 3X + Y^2 - 3 = 0} $\subset \Re x \Re$

   Solución: despejamos Y: Y = $\pm\sqrt{3-3X}$.

1) ¿Hay denominadores variables? No. Por ahora sirven todos los reales.

2) ¿Hay raíces pares de cantidades variables? Si. Como sólo se puede extraer raíz par a reales POSITIVOS, 3 - 3X $\geq$ 0 y si se resuelve: X $\leq$ 1. Por tanto X sólo puede tomar valores en]- ∞ ,1]. Luego el dominio es el intervalo]- ∞ ,1].

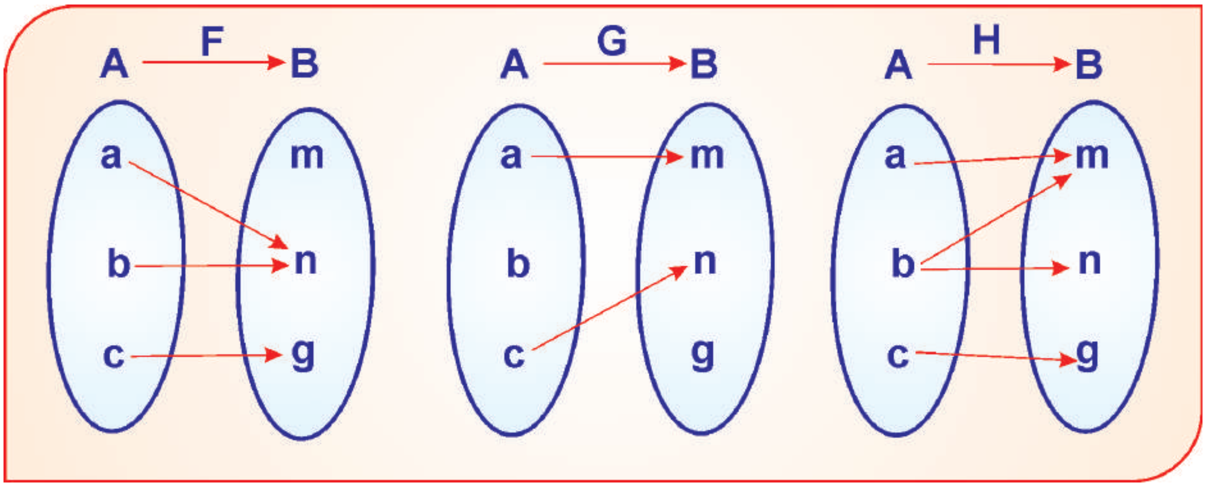
CÁLCULO DEL RANGO DE RELACIONES EN LOS REALES

Para el cálculo del RANGO se procede de manera similar, pero expresando "X" en función de "Y" (despejando X en la relación dada).

Con un compañero, calculamos el RANGO de las relaciones planteadas en los ejemplos anteriores, buscando estrategias que permitan tener éxito.

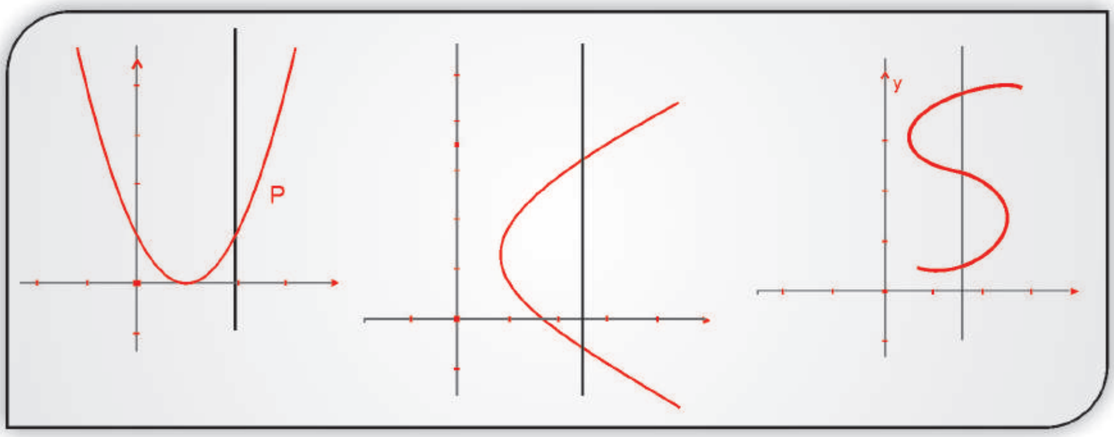
LAS RELACIONES FUNCIONALES O SIMPLEMENTE FUNCIONES

Una FUNCIÓN es una relación en la que se cumplen: 1. El dominio es igual al conjunto de salida; 2. A cada elemento del dominio se le asocia solamente un elemento del conjunto de llegada. O sea: Una relación es FUNCIÓN si todos los elementos del conjunto de salida están relacionados una sola vez con elementos del conjunto de llegada.



En los diagramas sólo es función la F; G no es función porque b ∈ A, pero no está relacionado con algún elemento de B; H tampoco es función porque b ∈ A está relacionado en más de una vez.

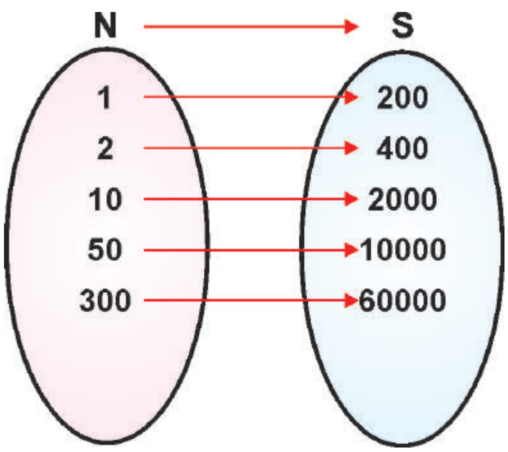
La gráfica cartesiana de una relación también permite decidir si es o no una función: En efecto, si se trata de una relación funcional, cualquier perpendicular al eje de las X sólo puede cortar a la gráfica en un punto.



En las gráficas, la primera es función porque una perpendicular al eje x sólo la corta en un punto; la segunda no es función porque la perpendicular la corta en dos puntos; la tercera tampoco es función por la perpendicular al eje x la corta en tres puntos.

Finalmente, una función es similar a un dispositivo que recibe en su entrada un valor para la variable X, la procesa de acuerdo con una regla preestablecida y entrega un solo resultado Y. Es el caso de la máquina registradora de un supermercado en donde la persona encargada de la caja recibe los artículos, introduce un código y el dispositivo muestra la cantidad de dinero que debe cancelar el cliente.

En la cotidianidad se presentan diversas situaciones que son funciones. Por ejemplo, el salario que devenga una persona recolectora de café depende de los kilogramos de café de buena calidad (maduro, sin pezón) que recoja, de la topografía del terreno..., pues se supone que por cada kilogramo le pagan una cantidad constante de dinero, luego SALARIO = COSTO DE UN KILOGRAMO * NÚMERO DE KILOGRAMOS RECOLECTADOS. Si llamamos "n" al número de kilogramos, S al salario percibido y suponemos que le pagan $200 por cada kilogramo, podemos elaborar un diagrama de Venn-Euler y la función la representamos así:



Como se ve en el diagrama sagital, las posibilidades de tener un mayor nivel de vida dependen de un ingreso suficiente para satisfacer las necesidades básicas. Si en la familia varios miembros trabajan, por equidad todos deberán aportar en la medida de sus capacidades para procurar bienestar a todos los integrantes del núcleo familiar. Para mi entorno, ¿Es esto cierto?; ¿En que medida mi aporte (aunque no sea en dinero) contribuye al bienestar de mi familia?; si tengo fallos en algún sentido, ¿Cómo puedo remediarlos? Tenga en cuenta que el dinero percibido por la labor de recolectar el café depende de la cantidad y de la calidad del grano.

Con la ejercitación verifico mi avance en el aprendizaje. Por tanto, conscientemente intento desarrollar las siguientes actividades en mi cuaderno de apuntes, comparo mis resultados con otros compañeros del subgrupo hasta ponernos de acuerdo. Esta comparación me permitirá identificar los factores de éxito o de dificultades en mi tarea. Presento informe al profesor con el fin de identificar los aspectos en los que debo mejorar.

1. Dados los conjuntos A = {1, 2, 3, 4, 5} y B = {4, 5, 6} y las siguientes relaciones definidas en A x B por los enunciados:

F = {(x, y) / X = Y}

G = { (x, y) / X es divisor de Y}

H = { (x, y) / $X \geq Y$}

J = { (x, y) / Y = X^2 }

K = { (x, y) / X = Y - 2

a) Calculo el conjunto solución de cada relación.

b) Determino el DOMINIO y el RANGO de cada una.

c) Elaboro diagramas sagitales para representar cada relación.

d) Defino y calculo la relación inversa para cada caso.

e) Represento en un mismo plano cartesiano tanto la relación como su inversa.

2. Resuelvo el mismo ejercicio pero operando con A x A.

3. Para las siguientes relaciones, calculo el DOMINIO y EL RANGO.

a) $3X^2 + 5Y - 6 = 0$

b) $3y + 4X^2 - 4X + 3 = 0$

c) $2X - Y + 7 = 0$

d) $XY + 2X - 4 = 0$

e) $2X^2 - 5XY + 6 = 0$

4. Sea R: $\Re \Rightarrow \Re$. Indico cuáles de las siguientes relaciones son funciones.

   a) R = { (x, y) / $y = +\sqrt{X+1}$ }

   b) R = { (x, y) / $y^2 = X - 3$ }

   c) R = { (x, y) / X < Y}

   d) R = { (x, y) / X + 2 = 0}

5. De las siguientes relaciones digo cuáles son funciones, justificando la respuesta:

   a) F: $\mathrm{Z} \Rightarrow \mathrm{N}$, definida por F(x) = X^2

   b) G: $\Re \Rightarrow \Re$, definida por G(x) = π

   c) H: $\Re \Rightarrow \Re$, definida por H(x) = X^3

   d) K: $\mathrm{N} \Rightarrow \mathrm{N}$, definida por K(x) = $X^2 + 1$

   e) L: integrantes de mi familia $\Rightarrow$ años, definida por "A cada miembro de mi familia asociarle su edad".

6) Elaboro una lista de las fortalezas que caracterizan las relaciones familiares en mi entorno y describo la manera de fomentarlas. Igualmente, hago una lista de las falencias y planteo estrategias para superarlas.

Sin darnos cuenta, usamos frecuentemente funciones. Por ejemplo, cuando compramos, digamos cuadernos, el valor que se paga es función del número de cuadernos (si los cuadernos tienen un costo igual), o sea:

Valor = costo de un cuaderno * Número de cuadernos.

Luego “valor” es función de Número de cuadernos.

Haciendo un razonamiento similar, menciono algunas funciones que son frecuentes en nuestro entorno e ilustro con diagramas de Venn-Euler, comparto con mis compañeros de subgrupo, hacemos un informe por escrito y lo presentamos al profesor.

Cotejado mi trabajo con el de otros compañeros, identifico el mejor, analizo las razones de su éxito y procuro emular su estrategia.

Respecto de las relaciones familiares, así como se definieron las relaciones “ser padre de” y “ser hijo de” (inversas entre sí), defino dos relaciones más de parentesco con sus respectivas inversas y elaboro los respectivos diagramas sagitales. ¿Cuáles de éstas relaciones son funciones? (Justifico las respuestas y las discuto con mis compañeros de subgrupo y con el profesor).

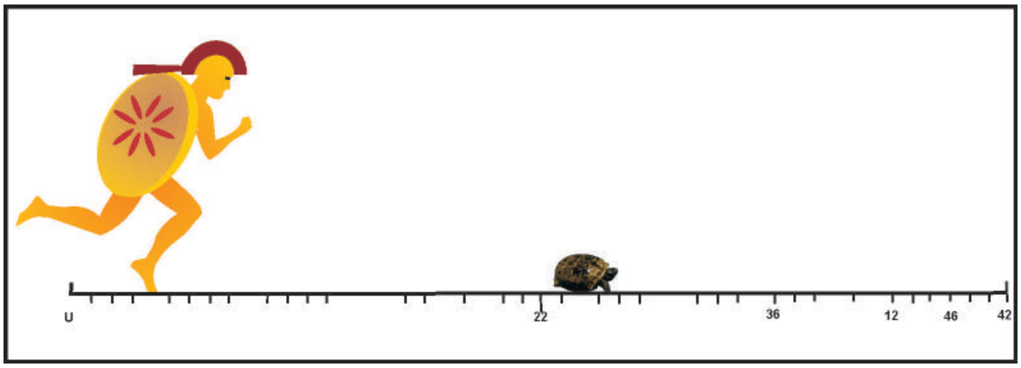
¿Y DE MI PROYECTO DE VIDA QUÉ?

Hago algunas consideraciones que me permitan identificar cómo está mi familia con relación a otras de mi entorno, teniendo en cuenta número de integrantes, calidad de vida, servicios de salud, dotación de servicios públicos, niveles de educación, convivencia sin sobresaltos, escribo estos resultados, los archivo en mi carpeta personal y los utilizo para mejorar mi proyecto de vida.

ESTUDIO Y ADAPTACIÓN DE LA GUÍA

GUÍA 2

¿DÓNDE ESTÁN LAS BASES DEL CÁLCULO?



Argumento de Aquiles y la Tortuga

Según éste argumento, el más rápido de los hombres, Aquiles, no podrá alcanzar nunca al más lento de los animales, la tortuga, si se da a ésta una ventaja inicial en una carrera, pues mientras Aquiles recorre el camino que la tortuga llevaba por la mencionada ventaja inicial, la tortuga habrá recorrido otra porción, aunque más pequeña. Cuando Aquiles haya llegado a recorrer ésta última porción de camino, la tortuga habrá avanzado otra porción más pequeña, y así la tortuga llevará siempre la ventaja hasta en espacios infinitamente pequeños, con lo cual, Aquiles no podrá alcanzarla nunca.

INDICADORES DE LOGROS:

- Define una sucesión numérica, calcula el elemento a_n y la clasifica correctamente
- Establece el concepto de límite con sus propiedades.
- Maneja adecuadamente las propiedades de los límites y las aplica a sucesiones y funciones reales para calcularles el límite (cuando exista).
- Identifica la diferencia entre trabajo en grupo y trabajo en equipo. (TRABAJO EN EQUIPO).
- Demuestra una actitud abierta, propositiva y proactiva frente al trabajo en grupo.
- Comparte la información y la experiencia con los demás
- Concierta con el grupo los objetivos y métodos de trabajo.
- Asume roles, responsabilidades y compromisos acordes a sus capacidades y las necesidades del grupo.
- Evalúa colectivamente, de manera crítica y reflexiva los resultados alcanzados por el grupo.
- Coopera con los otros, para lograr los resultados esperados por el grupo.

Los conceptos que encontramos a continuación son de gran utilidad en el desempeño de nuestro trabajo. Leámoslos y comentémoslos con mucho interés.

En esta guía trataremos la competencia laboral general **Trabajo en Equipo** cuya definición es un poco compleja porque se suele confundir trabajo en grupo con trabajo en equipo.

UN GRUPO lo podemos considerar como un conjunto de personas que tienen un propósito común, que no tiene necesariamente funciones individuales y específicas definidas, ni estrategias o procedimientos establecidos, el accionar del grupo, no necesariamente corresponde al objeto de la totalidad de sus participantes, lo cual genera que algunos integrantes no asuman sus responsabilidades y simplemente se dediquen a "chupar rueda" como coloquialmente decimos (los integrantes que sólo aspiran a que su nombre figure como integrante del grupo para beneficiarse del trabajo de los otros).

UN EQUIPO, se entiende como un conjunto de personas que se encuentran reunidas en torno a un propósito común, que comparten una serie de valores, procesos de organización, comunicación y estrategias para adelantar procesos o lograr compromisos con el equipo; todos los integrantes trabajan por el equipo.

En la naturaleza, tenemos ejemplos de trabajo en equipo como en un hormiguero o una colmena, en donde cada miembro aporta y se beneficia; las "mingas" de las comunidades indígenas en nuestro medio son otro ejemplo del beneficio que conlleva el trabajo en equipo.

Esta competencia facilita el aprendizaje del trabajo en grupo, a partir de modelos de cooperación, mejora las dinámicas de trabajo colectivo, se potencia la generación de alternativas de trabajo grupal, a partir de los conocimientos, habilidades, destrezas y talentos de todo el equipo, se generan procesos de aprendizaje relacionados con la corresponsabilidad frente a las funciones, tareas y resultados esperados, se construye un conocimiento de grupo que permite la evaluación crítica y reflexiva de los resultados obtenidos, se facilita la solución de problemas, aplicando ideas creativas e innovadoras, se mejoran la planeación, ejecución y evaluación de los procesos planteados por el equipo.

Cuando se trabaja en equipo, todos los integrantes del grupo aportan y se responsabilizan, en procura de que los asociados alcancen los logros propuestos.

Estemos, pues, atentos a las sugerencias y actividades propuestas en la guía y que se refieren a esta competencia.

A

Con mis compañeros de subgrupo leemos, analizamos y revisamos nuestros conocimientos en matemáticas, procurando que todos participen. Si es necesario repasamos los temas que debamos afianzar.

Sean las secuencias:
3, 7, 11, 15,... 30, 27, 24, 21,... 2, 6, 18, 54,... 60, 30, 15, 7.5,...
Agregamos dos elementos a cada secuencia y determinamos la regla general que permite obtener cada una de ellas. Escribimos otros ejemplos similares a éste y los discutimos.

Con seguridad, reconocieron en los ejemplos anteriores dos progresiones aritméticas y dos geométricas. Son casos especiales del tema que nos ocupará a continuación, que es fundamental para el estudio del cálculo infinitesimal.

¿La actividad anterior fue realizada en grupo o en equipo? ¿Por qué?

B

La siguiente información contiene los elementos fundamentales para encarar el estudio del cálculo infinitesimal, por tanto es necesario que compartamos y discutamos con los compañeros de subgrupo, intentando comprender e interiorizar los conceptos para aplicarlos a la solución de los ejercicios propuestos.

Leemos, analizamos y consignamos en el cuaderno de matemáticas lo que aparece en el recuadro verde

Consideremos las siguientes relaciones definidas por comprensión en: $\mathrm{N} \Rightarrow \Re$

$S_0 = \{(n, S_{(n)}) / S_{(n)} = n + 1\}$ (Se lee "S subcero es el conjunto conformado por los pares n, S sub-ene- tales que S sub-ene- es igual a n mas uno").

$$S_1 = \{(n, S_{(n)}) \ / \ S_{(n)} = \frac{n-1}{n+2}\}$$

$$S_2 = \{(n, S_{(n)}) \ / \ S_{(n)} = 5-n^2\}$$

$$S_3 = \{(n, S_{(n)}) \ / \ S_{(n)} = \frac{3n^2}{n^2+4}\}$$

$$S_4 = \{(n, S_{(n)}) \ / \ S_{(n)} = \frac{2}{n}\}$$

$$S_5 = \{(n, S_{(n)}) \ / \ S_{(n)} = (-1)^n (n^2+1)\}$$

$$S_6 = \{(n, S_{(n)}) \ / \ S_{(n)} = 2(-1)^{n-1}\}$$

Aunque las relaciones anteriores no se pueden describir completamente por extensión sí podemos calcular algunos de los primeros elementos, así:

$$S_0 = \{(1,2),(2,3),(3,4),(4,5),\ldots(n,n+1)\}$$

$$S_1 = \{(1,0),(2,\frac{1}{3}),(3,\frac{2}{5}),(4,\frac{1}{2}),\ldots(n,\frac{n-1}{n+2})\}$$

$$S_2 = \{(1,4),(2,1),(3,-4),(4,-11),\ldots(n,5-n^2)\}$$

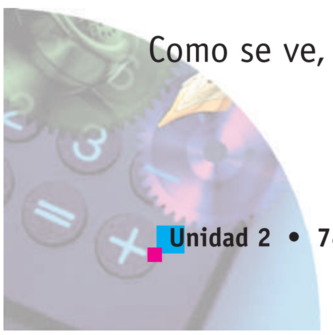
$$S_3 = \{(1,\frac{3}{5}),(2,\frac{3}{2}),(3,\frac{27}{13}),(4,\frac{12}{5}),\ldots(n,\frac{3n^2}{n^2+4})\}$$

$$S_4 = \{(1,2),(2,1),(3,\frac{2}{3}),(4,\frac{1}{2}),\ldots(n,\frac{2}{n})\}$$

$$S_5 = \{(1,-2),(2,5),(3,-10),(4,17),\ldots(n,(-1)^n(n^2+1)\}$$

$$S_6 = \{(1,2,(2,-2),(3,2),(4,-2),\ldots(n,(-1)^{n-1})\}$$

Como se ve, a cada natural se le asocia un solo real, es decir, son funciones.



DEFINICIÓN: una sucesión numérica es una función que tiene por dominio los naturales y por rango un subconjunto de los reales.

NOMENCLATURA: como en toda sucesión las primeras componentes son los naturales, para describir la sucesión es suficiente nombrar las segundas componentes, o sea: $S_n = a_1, a_2, a_3, a_4, ...a_n$, siendo a el término y n la posición que ocupa en la sucesión. Por ejemplo:

$$S_0 = \{2,3,4,5...n+1\}$$

$$S_1 = \{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}), ... \frac{n-1}{n+2}\}$$

$$S_2 = \{4,1,-4,-11,...5-n^2\}$$

$$S_3 = \{\frac{3}{5}, \frac{3}{2}, \frac{27}{13}, \frac{12}{5}, ... \frac{3n^2}{n^2+4}\}$$

$$S_4 = \{2,1,\frac{2}{3},\frac{1}{2}, ... \frac{2}{n}\}$$

$$S_5 = \{-2,5,-10,17,...(-1)^n(n^2+1)\}$$

$$S_6 = \{2,-2,2,-2,...(-1)^{n-1})\}$$

CLASES DE SUCESIONES

a) **Crecientes:** si cualquier término es mayor que el anterior.

b) **Decrecientes:** si cualquier término es menor que el anterior.

c) **Alternantes:** si es creciente para ciertos términos y decreciente para otros.

d) **Convergentes:** si el término enésimo tiende a un solo valor finito, cuando n tiende al infinito natural.

e) **Divergentes:** si el término enésimo tiende a uno de los infinitos reales, cuando n tiende al infinito natural.

f) Oscilantes: cuando el término enésimo tiende a más de un valor finito o a los dos infinitos reales, cuando n tiende a infinito natural.

En los ejemplos anteriores, mirando primero los términos dados y luego asignando a n valores grandes como 10^2, 10^3, 10^6 etc., se puede comprobar que:

- S_0 es creciente y divergente.
- S_1 es creciente y convergente.
- S_2 es decreciente y divergente.
- S_3 es creciente y convergente.
- S_4 es decreciente y convergente.
- S_5 es alternante y oscilante.
- S_6 es alternante y oscilante.

En efecto: En S_1, por ejemplo, $a_{100} = \; ; \; \frac{100 - 1}{100 + 2} = \frac{99}{102} = 0.97$

$a_{1000} = \frac{1000 - 1}{1000 + 2} = \frac{999}{1002} = 0.997 \quad ; a_{1000000} = \frac{1000000 - 1}{1000000 + 2} = \frac{999999}{1000002} = 0.99999$. Se ve que entre más grande sea el valor de n, el cociente se aproximará tanto a 1 como se desee y la sucesión converge a 1. También se evidencia que para valores grande de n, los valores “1” del numerador y “2” del denominador se pueden suprimir (es algo así como a una playa de arena quitarle 1 o 2 granos) sin cometer error.

Si calculamos términos similares en S_2, resulta:
$a_{100} = 5 - 100^2 = 5 - 10000 = -9995$; $a_{1000} = 5 - 1000^2 = 5 - 1000000 = -999995$.
Aquí, entre más grande sea el valor de n, tanto más alejado a la izquierda de 0 es el valor del término y la sucesión diverge a $-\infty$.

EL CONCEPTO INTUITIVO DE LÍMITE DE UNA SUCESIÓN NUMÉRICA

Se ha visto que existen sucesiones que tienden a un solo valor finito, cuando n tiende a infinito natural, y son convergentes. En lo sucesivo se dirá que la sucesión tiene un límite.

El concepto de límite ha sido de enorme utilidad en el desarrollo de las matemáticas; en él se fundamenta el cálculo infinitesimal, así llamado por utilizar cantidades infinitesimales (infinitamente pequeñas).

Aunque muchos matemáticos utilizaron la idea intuitiva de límite, fue el matemático francés Agustín Cauchy (1789-1857) quien a principios del siglo XIX, dio una definición satisfactoria de límite.

DEFINICIÓN: si una sucesión converge a un valor K, el límite de la sucesión es K siempre y cuando el valor absoluto de la diferencia entre el enésimo término de la sucesión y K sea un número real positivo muy próximo a cero, o sea:

$\lim_{n \to \infty} S(n) = K \Leftrightarrow |S(n) - K| < r$, siendo r un real positivo muy próximo a 0.

Propiedades de los límites

1) $\lim_{n \to \infty} C = C$, C es constante (El límite de una constante es la constante).

2) $\lim_{n \to \infty} C * S(n) = C * \lim_{n \to \infty} S(n)$ (El límite de una constante por una sucesión es igual a la constante por el límite de la sucesión).

3) $\lim_{n \to \infty} \frac{C}{n} = 0$ (El límite de una constante sobre una variable que tiende al infinito es igual a 0).

4) $\lim_{n \to \infty} [S(n) + S1(n)] = \lim_{n \to \infty} S(n) + \lim_{n \to \infty} S1(n)$

(El límite de una suma de sucesiones es igual a la sumas de los límites de los sumandos). La propiedad también se aplica para la resta que es la inversa de la suma.

5) $\lim_{n \to \infty} [S(n) * S1(n)] = \lim_{n \to \infty} S(n) * \lim_{n \to \infty} S1(n)$

(El límite de un producto de sucesiones es igual al producto de los límites de los factores). Vale también para el cociente que es la inversa del producto.

$$6)\quad \lim_{n\to\infty} b^n = \begin{cases} 1, \text{ si } b = 1 \\ 0, \text{si } |b| < 1 \\ \infty \text{ si, } b > 1 \end{cases}$$

(El límite de una potencia de exponente variable y que tiende al infinito es igual a 1, si la base es 1; es igual a 0, si la base en valor absoluto es menor que 1; es infinito si la base es mayor que 1).

Como aplicación a las propiedades calculemos:

$$\lim_{n\to\infty} [2 - (1)^n]$$

Solución: Como la operación general es una suma, tomamos el límite de cada sumando (propiedad 4): $\lim_{n\to\infty} 2 = 2$ (el límite de una constante es igual a la constante (propiedad 1). Y $\lim_{n\to\infty} (1)^n = 1$ (Propiedad 6:el límite de una potencia cuando la base es 1 y el exponente tiende a ∞ es 1), o sea:

$$\lim_{n\to\infty} [2 - (1)^n] = \lim_{n\to\infty} 2 \lim_{n\to\infty} (1)^n = 2 - 1 = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2\sqrt{3} - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{\sqrt{2} + \frac{2}{n^2}}$$

Se trata del límite de un cociente y por tanto se debe tomar el límite, tanto al dividendo como al divisor; en el numerador se ve una suma y en el denominador también; en el numerador hay una constante y un potencia de exponente variable; en el denominador hay una constante y una constante sobre una variable, lo que justifica lo siguiente:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{2\sqrt{3} - (\frac{2}{3})^n}{\sqrt{2} + \frac{1}{n^2}} = \frac{\lim_{n \to \infty}\left[2\sqrt{3} - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right]}{\lim_{n \to \infty}\left(\sqrt{2} + \frac{1}{n^2}\right)} = \frac{2\sqrt{3} - 0}{\sqrt{2} + 0} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}},$$

Resultado que racionalizado es igual a $\sqrt{6}$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{4n^3 + 3n^2}{2n^3 - 3n + 1}$$

De acuerdo con los ejercicios anteriores, para hallar el límite se reemplaza la valímible n por ∞ (dar el paso al límite) pues al buscar el límite de una operación, ésta se conserva.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{4n^3 + 3n^2}{2n^3 - 3n + 1} = \frac{4*\infty^3 + 3*\infty^2}{2*\infty^3 - 3*\infty + 1} = \frac{\infty}{\infty}$$

Es lógico pensar en que una suma de infinitos da otro infinito, pero el resultado final $\frac{\infty}{\infty}$ no tiene sentido en matemáticas y recibe el nombre de FORMA INDETERMINADA.

En ocasiones, la indeterminación se puede eliminar por métodos algebraicos, usando un artificio que consiste en transformar la expresión dada dividiendo todos los términos, tanto del numerador como del denominador por la variable que tenga mayor exponente (n^3) en este caso y simplificando antes de dar el paso al límite, así:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{4n^3 + 3n^2}{2n^3 - 3n + 1} = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{4n^3}{n^3} + \frac{3n^2}{n^3}}{\frac{2n^3}{n^3} - \frac{3n}{n^3} + 1} = \lim_{n \to \infty} \frac{4 + \frac{3}{n}}{2 - \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^3}}$$

Si se vuelve a dar el paso al límite, queda:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{4n^3 + 3n^2}{2n^3 - 3n + 1} = \frac{4 + 0}{2 - 0 + 0} = 2$$, que es el límite.

EL LÍMITE DE FUNCIONES REALES

En las sucesiones se ha operado con un tipo especial de funciones de naturales contra reales y se les calculó el límite cuando la variable tiende al infinito natural. Se amplía ahora dicho criterio a funciones de reales contra reales, es decir, se va a extender el conjunto DOMINIO. Estas funciones reciben el nombre de REALES y para calcular su límite se procede de manera análoga a como se hizo con las sucesiones; la diferencia está en que la variable X puede tender a cualquier valor real o a cualquiera de los infinitos.

Para hallar el límite de una función real se empieza por dar el paso al límite, es decir, reemplazar la variable por el valor dado: si el resultado es un valor finito, ese es el límite; si aparece $\frac{\infty}{\infty}$ se trata de la indeterminada a causa del cero, que a veces puede eliminarse buscando la manera de que el factor lineal que anula el divisor aparezca, tanto en el numerador como en el denominador, para poder simplificar antes de volver a dar el paso al límite; si el resultado es ∞, el límite no existe, situación que en ocasiones es aparente y el límite se puede calcular efectuando primero una racionalización, del numerador ó del denominador ó de ambos.

Algunos ejemplos aclaran la situación:

$$\lim_{x \to -4} (4X^2 - 5X + 1) = 4(-4)^2 - 5(-4) + 1 = 64 + 20 + 1 = 85$$

(valor finito y es el límite)

$$\lim_{x \to -1} \frac{2X^5 - 3X^3 + 2x}{X + 8} = \frac{2(-1)^5 - 3(-1)^3 + 2(-1)}{-1 + 8} = \frac{-2 + 3 - 2}{7} = -\frac{1}{7}$$

(valor finito y es el límite)

$$\lim_{x \to 1} \frac{X^2 - 1}{X - 1} = \frac{1^2 - 1}{1 - 1} = \frac{0}{0}$$, forma indeterminada a causa de la división por 0.

Como X tiende a 1, el factor lineal que anula el denominador es X-1 y si se logra que aparezca como factor, tanto en el numerador como en el denominador, se simplifica y la indeterminación desaparece; al volver a dar el paso al límite se obtiene el resultado:

$$\lim_{x \to 1} \frac{X^2 - 1}{X - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)} = \lim_{x \to 1} (x+1) = 1 + 1 = 2$$

que es el valor del límite.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{X+3} - \sqrt{3}}{X} = \frac{\sqrt{0+3} - \sqrt{3}}{0} = \frac{0}{0}$$, indeterminada a causa de la división por 0.

El factor lineal que anula el denominador es X y por tanto se debe buscar la manera de que X aparezca como factor, tanto en el numerador como en el denominador; en este caso se racionaliza el numerador, así:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{X+3} - \sqrt{3}}{X} = \lim_{x \to 0} \frac{(\sqrt{X+3} - \sqrt{3})\ (\sqrt{X+3} + \sqrt{3})}{X\,(\sqrt{X+3} + \sqrt{3})} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{X + 3 - 3}{X(\sqrt{X+3} + \sqrt{3})} \right) \Rightarrow$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{X+3} - \sqrt{3}}{X} = \lim_{x \to 0} \frac{X}{X\,(\sqrt{X+3} + \sqrt{3})} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{X+3} + \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{0+3} + \sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

es el límite buscado y se puede racionalizar, quedando $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

Guiándome por los conceptos expuestos antes sobre la competencia y ayudándome de los ejercicios resueltos, desarrollamos en el cuaderno los siguientes planteamientos.

No olvidemos que mi aporte individual debe beneficiar a todos los compañeros del subgrupo. Para tal efecto designemos algunas funciones, así: un integrante que modere las discusiones de cada uno de los ejercicios; otro que registre las conclusiones y los demás que tengan una participación efectiva. Así podremos evidenciar un verdadero trabajo en equipo.

1. Analizo las siguientes sucesiones, determinando cuáles de ellas son crecientes, decrecientes, oscilantes, convergentes o divergentes. (Sugerencia: calcular los tres primeros términos y luego hallar a_{1000}, por ejemplo)

a) $a_n = n + 2$

b) $b_n = 6 - 12n$

c) $c_n = 3 / (n+3)$

d) $d_n = (n^2 - 1)/(n^2 + 1)$

e) $f_n = (-1)^{2n} * [n/(n+1)]$

2. Usando las propiedades adecuadas, calculo el límite de las siguientes sucesiones:

a) $\lim_{n \to \infty} \dfrac{n + 3}{n}$

b) $\lim_{n \to \infty} \dfrac{4n^3 + 3n^2 + 3}{1 + 2n^3}$

c) $\lim_{n \to \infty} \dfrac{2^{n-1}}{2^{n+1}}$

d) $\lim_{n \to \infty} (\sqrt{2n + 1} - \sqrt{2n - 1})$

e) $\lim_{n \to \infty} \dfrac{\sqrt[3]{n + 1}}{n}$

3) Evalúo el límite de las siguientes funciones:

a) $\lim_{x \to -1} \dfrac{x^3 + 1}{x^2 + 1}$

b) $\lim_{x \to 1} \dfrac{X - 1}{X^2 + 2x - 3}$

c) $\lim_{x \to 2} \dfrac{X^2 - 4}{2X^2 - 3X + 2}$

d) $\lim_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{4}}{X - 4}$

e) $\lim_{x \to 2} \dfrac{4 - X^2}{3 - \sqrt{X^2 + 5}}$

Para afianzar conceptos y encontrar algunas aplicaciones a la idea intuitiva de límite, desarrollo las siguientes cuestiones:

1. Expresiones decimales como 2.333.., 0.454545…son desarrollos decimales periódicos puros, porque empiezan en la posición de las décimas y hay una cifra o grupo de cifras que se repiten. Ese grupo de cifras son el periodo. En la primera expresión el período es 3 y en la segunda es 45. La generatriz es el cociente de donde proviene un desarrollo decimal periódico y en este caso, esa generatriz resulta de escribir el período y dividirlo entre tantos nueves como cifras tiene el periodo. En los ejemplos, las generatrices son $2 + \dfrac{3}{9}$ y $\dfrac{45}{99}$, que simplificadas son $\dfrac{7}{3}$ y $\dfrac{5}{11}$. Ahora consideremos expresiones como 2.999… y 4.999 que son desarrollos decimales periódicos puros. Si se aplica la regla anterior, queda:

   $2 + 0.999 = 2 + \dfrac{9}{9} = 2 + 1 = 3$. De forma similar, $4 + 0.999 = 4 + \dfrac{9}{9} = 4 + 1 = 5$.

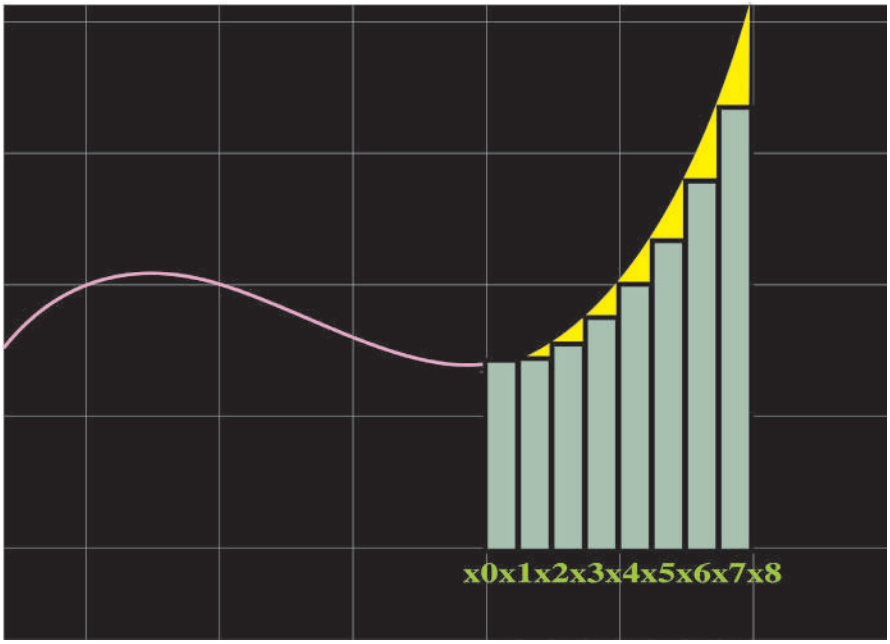
   Como se ve, no existen dos enteros tales que al dividirlos den un desarrollo decimal con solo nueves en la parte decimal y se nos presenta intuitivamente un paso al límite. Ahora, plantee y desarrolle algunos ejemplos que le permitan afianzar el concepto.

2. Uso la aplicación CABRI para construir un polígono regular de 20 o de 30 lados por ejemplo para que compruebe que el perímetro de ese polígono, cuando el número de lados es muy grande, es la circunferencia.

3. Igualmente, uso micromundos Pro para ordenarle a la tortuga que dibuje una circunferencia, haciendo avances pequeños y girando un ángulo también pequeño, hasta completar un ángulo de una vuelta.

ESTUDIO Y ADAPTACIÓN DE LA GUÍA

Y EN CÁLCULO ¿QUÉ ES LA DIFERENCIACIÓN?



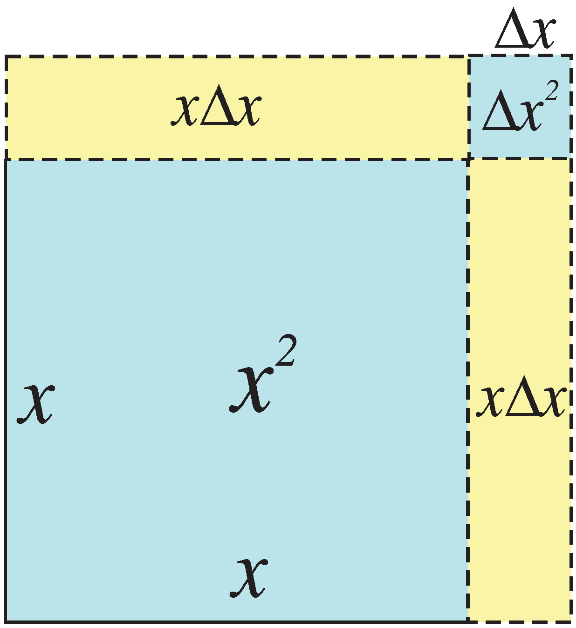
Los rectángulos tienen igual base cuya longitud es x = X1-XO = X2-X1 = ... X8-X7. La génesis del cálculo se remonta a la antigua Grecia, cuando Arquimedes tuvo la genial idea de considerar las áreas como una colección infinita de rectángulos. Pero debieron pasar 2000 años hasta que Cavalieri, matemático italiano, volviera a usar de esa manera los infinitos.

LOGROS DE LA UNIDAD:

- Define el concepto de incremento de una variable y lo utiliza adecuadamente para hallar la ecuación general que permite su cálculo.
- Define el incremento relativo de una función y lo usa para calcular la velocidad media de una partícula cuya ecuación cinemática se conoce.
- Define el concepto de derivada, establece las fórmulas para diferenciar funciones algebraicas y las usa adecuadamente.
- Resuelve problemas en forma acertada y oportuna. (SOLUCIÓN DE PROBLEMAS).
- Dinamiza los conocimientos, habilidades y destrezas de las personas, con el propósito de que interactúen de manera autónoma y generen resultados. (LIDERAZGO).

GUÍA 1

¿INCREMENTAR ES SINÓNIMO DE AUMENTAR?



Si el cuadrado de lado x se incrementa en Δx, resulta otro cuadrado de lado $x+\Delta x$ cuya área es equivalente a la suma de las áreas coloreadas.

INDICADORES DE LOGROS:

- Define y calcula el incremento de una variable.
- Establece y usa correctamente la ecuación general de los incrementos.
- Define y calcula el incremento relativo de una función y lo usa con propiedad para calcular la velocidad media de una partícula cuando se conoce su ecuación cinemática.
- Define la derivada de una función Y=F(x) y por medio de ella la calcula correctamente.
- Identifica problemas, sus causas y consecuencias y establece una definición de éste (SOLUCIÓN DE PROBLEMAS).
- Aporta soluciones y evalúa alternativas.
- Ejecuta en la medida de sus posibilidades, acciones que contribuyen a la solución de problemas detectados.
- Hace seguimiento a la solución de los problemas identificados y realiza retroalimentación.

Antes de iniciar el desarrollo del aspecto matemático de la guía leemos, analizamos y comentamos los siguientes conceptos, relacionados con la competencia laboral general **Solución de Problemas**, que se entiende como "capacidad de identificar adecuadamente un problema, analizando sus síntomas, causas y consecuencias, de forma tal que se pueda definir claramente para entrar de una forma creativa a aportar soluciones alternativas, evaluando la mejor de éstas, ejecutándola y haciéndole seguimiento para determinar su sostenibilidad en el tiempo.

Los problemas consumen tiempo, crean estrés y parece que nunca van a desaparecer. Por ello muchas personas tratan de librarse de ellos lo antes posible. La tendencia natural es seleccionar la primera solución razonable que se nos ocurre y acabar con el problema. Por desgracia, la primera solución no es muchas veces la mejor.

Cuando se tiene bien identificada la causa de un problema, ya se tiene un 50% de la solución de éste.

No siempre se llega a la mejor solución de un problema, sin embargo lo realmente importante es la actitud con que se asume y afronta.

La solución creativa de problemas, implica la práctica de una comunicación efectiva y una toma de decisiones de manera asertiva" (tomado de PROYECTO: "EDUCACIÓN MEDIA, CON PROFUNDIZACIÓN EN EDUCACIÓN PARA EL TRABAJO").

A

Ahora, leo, analizo y respondo las siguientes cuestiones relacionadas con conocimientos de matemáticas vistos antes.

Sea $F(x) = 3X^2 - 2X + 4$ Calculo F(1), F(-1), F(0), F(a) y F(a+b); F(a+b) – F(a). Cuando la variable X pasa de 0 a 1, ¿aumenta o disminuye? Y cuando cambia de 1 a -1, ¿aumenta o disminuye? ¿Qué nombre se le podría dar a ese cambio?

Comparo mis resultados con los de otros compañeros y si es preciso refuerzo mis conocimientos en matemáticas. Si en el análisis surgen problemas de comprensión, ¿cómo los resolvería?

B

Leo, analizo y consigno en el cuaderno de matemáticas lo que aparece en el recuadro verde.

Dada una variable V, se define el incremento de V como el cambio que experimenta V al cambiar de un valor inicial V_1 a otro valor final V_2, es decir, incremento de V es igual a $V_2 - V_1$.

De acuerdo con la definición, incrementar no siempre es aumentar, pues una variación puede darse también como una disminución. Simbólicamente:
$\Delta v = V_2 - V_1$ (Se lee «incremento delta v es igual v_2 menos v_1)

Por ejemplo, si V cambia de 2 a 5, $\Delta v = 5 - 2 = 3$; si V cambia de –1 a 6 entonces $\Delta v = 6 - (-1) = 6 + 1 = 7$

Usando la ecuación $\Delta v = V_2 - V_1$ calcule el valor final de la variable V. Para la solución es suficiente despejar V_2, así: $V_2 = V_1 + \Delta v$

LA ECUACIÓN GENERAL DE LOS INCREMENTOS

Sea (1) $Y = F(x)$. Si los incrementos de la variable X y de la función Y son Δx y Δy, respectivamente, los valores finales serán:

(2) $Y + \Delta y = F(X + \Delta x)$. Y si a la (2) le restamos la (1), queda:

(3) $\Delta y = F(X + \Delta x) - F(x)$, que es la ecuación general de los incrementos que permite calcular el incremento de la función a través del valor inicial de la variable y de su incremento.

Por ejemplo: si (1) $Y = X^2 - 3X + 1$, hallar la ecuación general de los incrementos.
(2) $Y + \Delta y = (X + \Delta x)^2 - 3(X + \Delta x) + 1$ (Incrementando, tanto la variable como la función).

(3) $\Delta y = (X + \Delta x)^2 - 3(X + \Delta x) + 1 - (X^2 - 3X + 1)$ (Restando la (1) de la (2)

(4) $\Delta y = X^2 + 2X\Delta x + \Delta x^2 - 3X - 3\Delta x + 1 - X^2 + 3X - 1$ (operando)

(5) $\Delta y = \Delta x(2X + \Delta x - 3)$ (Reduciendo términos semejantes y factorizando)

Usar el resultado anterior para calcular el incremento Δy de la función cuando la variable X cambia de 1.2 a 2.

Solución: $\Delta x = 2 - 1.2 = 0.8$. Luego: $\Delta y = 0.8[2(1.2) + 0.8 - 3] = 0.16$, que es la respuesta.

EL INCREMENTO RELATIVO DE UNA FUNCIÓN O COCIENTE INCREMENTAL O COCIENTE DE NEWTON

Si en la ecuación general de los incrementos $\Delta y = F(X + \Delta x) - F(x)$ dividimos los dos miembros entre Δx, resulta: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{F(X + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}$. El incremento relativo de la función es $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, es decir, la razón del incremento de la función al incremento de la variable. Por ejemplo, en la función $Y = X^2$, hallar el incremento relativo cuando X cambia de 1 a 1.2.

Solución: Buscamos la ecuación general de los incrementos:

$Y + \Delta x = (X +)^2$. Luego $\Delta y = ((X + \Delta x)^2 - X^2$. Por tanto:

$\Delta y = X^2 + 2X\Delta x + \Delta x^2 - X^2$, o sea: $\Delta y = \Delta x(2X + \Delta x)$ De aquí:

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2X + \Delta x$. Si X cambia de 1 a 1.2 entonces $\Delta x = 1.2 - 1 = 0.2$ y reemplazando:

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2(1) + 0.2 = 2.2$, que es el valor del incremento relativo.

Cuando la función es el espacio S y la variable es el tiempo t, el incremento relativo $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ corresponde a una velocidad media.

Por ejemplo: una partícula se mueve de acuerdo con la ecuación cinemática $S = 2t^2 + 5t - 3$, con S en metros y t en segundos.¿Cuál es la velocidad media cuando el tiempo cambia de 1 a 1.2 segundos?.

Solución: $S + \Delta s = 2(t + \Delta t)^2 + 5(t + \Delta t) - 3$. De donde:

$\Delta s = 2(t + \Delta t)^2 + 5(t + \Delta t) - 3 - (2t^2 + 5t - 3)$

$\Delta s = 2t^2 + 4t\ \Delta t + 2\ \Delta t^2 + 5t + 5\ \Delta t - 3 - 2t^2 - 5t + 3$

$\Delta s = \Delta t\ (4t + 2\Delta t + 5)$. Luego: $\frac{\Delta s}{\Delta t} = 4t + 2\Delta t + 5$. Por definición:

Velocidad media = $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ $4(1) + 2(0.2) + 5 = 9.4$, o sea, la velocidad media es de $9.4\ \frac{m}{seg}$

LA DERIVADA DE UNA FUNCIÓN

Sea Y = F(X) una función. Se denomina DERIVADA DE LA FUNCIÓN "Y" RESPECTO DE LA VARIABLE "X" al límite del incremento relativo de la función cuando el incremento de la variable tiende a cero. O sea:

$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ (Se lee " la derivada de Y con respecto a X es igual al límite de delta y sobre delta x cuando delta x tiende a cero).

NOMENCLATURA: Para indicar la derivada de una función se escribe:

$\frac{dy}{dx}$ $Y' = F'(x)$ (En cualquiera de los casos se lee "derivada de Y con respecto a x).

Ejemplo1: dada la función $Y = X^2 + 3X - 5$, calcule la derivada de la función con respecto de la variable usando la definición anterior.

(1) $Y = X^2 + 3X - 5$ (función dada)

(2) $Y + \Delta y = (X + \Delta x)^2 + 3(X + \Delta x) - 5$ (Incrementando la (1))

(3) $\Delta y = (X + \Delta x)^2 + 3(X + \Delta x) - 5 - (X^2 + 3X - 5)$ (Restando la (1) de (2))

(4) $\Delta y = X^2 + 2X\Delta x + 3X + 3\Delta x - 5 - X^2 - 3X + 5$ (Destruyendo paréntesis)

(5) $\Delta y = \Delta x(2X + 3)$ (Reduciendo y simplificando)

(6) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 2X + 3$ (Incremento relativo de la función)

(7) $\dfrac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} (2X + 3) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = 2X + 3$, aplicando la definición dada antes.

Ejemplo 2: Si $Y = X^3 - X^2 + 4$, calcule $\dfrac{dy}{dx}$, usando la definición dada.

(1) $Y = X^3 - X^2 + 4$ (Función dada)

(2) $Y + \Delta y = (X + \Delta x)^3 - (X + \Delta x)^2 + 4$ (Incrementando la (1))

(3) $\Delta y = (X + \Delta x)^3 - (X + \Delta x)^2 + 4 - (X^3 - X^2 + 4)$ (Restando la (1) de (2))

(4) $\Delta y = X^3 + 3X^2 \Delta x + 3X\Delta^2 x + \Delta^3 x - X^2 - 2X\Delta x - \Delta^2 x + 4 - X^3 + X^2 - 4$ (Destruyendo paréntesis)

(5) $\Delta y = \Delta x(3X^2 + 3X\Delta x + \Delta x^2 - 2X - \Delta x)$(Reduciendo y simplificando)

(6) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 3X^2 + 3X\Delta x + \Delta x^2 - 2X - \Delta x$(Incremento relativo de la función)

$\dfrac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} (3X^2 + 3X\Delta x + \Delta x^2 - 2X - \Delta x) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = 3X^2 - 2X$ que es la solución.

Ejemplo 3: Si $Y = \dfrac{3}{X}$, calcular $\dfrac{dy}{dx}$, usando la definición.

(1) $Y = \dfrac{3}{X}$ (función dada)

(2) $Y + \Delta y = \dfrac{3}{X + \Delta x}$ (Incrementando)

(3) $\Delta y = \dfrac{3}{X + \Delta x} - \dfrac{3}{X}$ (Restando la (1) de (2))

(4) $\Delta y = \dfrac{3X - 3(X + \Delta x)}{X(X + \Delta x)}$ (Efectuando la operación)

(5) $\Delta y = \dfrac{3X - 3X - 3\Delta x}{X(X + \Delta x)}$ (Destruyendo paréntesis)

(6) $\Delta y = \dfrac{-3\Delta x}{X(X + \Delta x)}$ (Reduciendo)

(7) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{-3}{X(X + \Delta x)}$ (Incremento relativo)

(8) $\dfrac{dy}{dx} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{-3}{X(X + \Delta x)} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-3}{X(X + 0)} = -\dfrac{3}{X^2}$ que es la solución.

Ejemplo 4: Si Y = $\sqrt{X}$, hallar Y' (derivada de Y con respecto a X)

(1) $Y = \sqrt{X}$ (Función dada)

(2) $Y + \Delta y = \sqrt{X + \Delta x}$ (Incrementando)

(3) $\Delta y = \sqrt{X + \Delta x} - \sqrt{X}$ (Restando la (1) de (2))

(4) $\Delta y = \dfrac{(\sqrt{X + \Delta x} - \sqrt{X})(\sqrt{X + \Delta x} + \sqrt{X})}{(\sqrt{X + \Delta x} + \sqrt{X})}$ (Multiplicando por $\sqrt{X + \Delta x} + \sqrt{X}$ para racionalizar el numerador de la (3))

(5) $\Delta y = \dfrac{X + \Delta x - X}{\sqrt{X + \Delta x} + \sqrt{X}}$

(6) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{1}{\sqrt{X + \Delta x} + \sqrt{X}}$ (Incremento relativo 9)

(7) $Y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{1}{\sqrt{X + \Delta x} + \sqrt{X}} \Rightarrow Y' = \dfrac{1}{\sqrt{X} + \sqrt{X}} = \dfrac{1}{2\sqrt{X}}$
que es la solución.

Guiándome por los conceptos expuestos antes y ayudándome de los ejercicios resueltos, desarrollo en mi cuaderno los siguientes planteamientos. Luego observo como allanan estas situaciones mis compañeros para detectar qué problemas pueden surgir y cómo los resolvemos. Para ello tengamos en cuenta no sólo las dificultades en cuanto a la temática, sino también el tiempo y los recursos empleados.

1. Calculo el incremento de la variable que se especifica:

   a) X cuando cambia de 2 a -3

   b) Y cuando cambia de -1.5 a 2.5

   c) M cuando cambia de –4 a –2

   d) Z cuando cambia de –1.1 a -1.2

2. Usando la definición de incremento, hallo el valor final de la variable si:

   a) $V_0 = 3$ y $\Delta v = 1$

   b) $X_0 = -1$ y $\Delta x = -0.1$

   c) $V_0 = X$ y $\Delta v = \Delta x$

   d) $V_0 = Y$ y $\Delta v = \Delta y$

3. Uso la ecuación general de los incrementos para hallar el incremento Δy de la función de acuerdo con las condiciones que se especifican:

   a) $Y = X^2 + 5X - 8$, si X varía de 1 a 1.2

   b) $Y = 8 - 5X^2$, si X cambia de 1.5 a 1

   c) $Y = \frac{1}{X}$, si X cambia de 2 a 2.3

   d) $Y = \sqrt{X}$, si X cambia de 1.4 a 3

4. Calculo el incremento relativo de la función en los siguientes casos:

   a) $Y = 2X - 3$, cuando X pasa de 3.3 a 3.5

   b) $Y = X^2 + 4X$, cuando X cambia de 0.7 a 0.85

   c) $Y = \frac{2}{X}$ cuando X pasa de 0.75 a 0.5

   d) $Y = X^2 + 5X - 8$, cuando X cambia de 1 a 0.8

5. Calculo la velocidad media de los siguientes movimientos (S en metros y t en segundos):

   a) $S = 5t^2$, cuando t varía de 3 seg a 3.5 seg

   b) $S = 3t^2 + 5$, cuando t cambia de 2 seg a 3 seg

   c) $S = 2t^2 + 5t - 3$, cuando t pasa de 2 seg a 5 seg

6. Si un capital inicial de $100.000 se convierte en $110.000 en 3 meses, ¿cuál es el incremento relativo del capital respecto del tiempo?

7. En una ciudad se observó que la población de la misma pasó de 895.000 habitantes a 1.400.000 en 12 años. ¿Cuál es el incremento relativo de la población respecto del tiempo?

8. Usando la definición calculo $\frac{dY}{dx}$ en:

   a) $Y = X^3 - 2x + 4$

   b) $Y = \frac{3}{X} + X$

   c) $Y = 3X^{-2} - X^{-1} + \frac{1}{2}$

D

Para determinar en qué medida he alcanzado los logros propuestos, conscientemente resuelvo y discuto, tanto con mis compañeros como con el profesor, los siguientes problemas que se presentan con mucha frecuencia en el campo laboral, análisis poblacional, etc.

1 De acuerdo con una circular del 18 de enero de 2005 del Ministerio de Protección Social, el salario mínimo legal vigente pasa de $358.000 a $381.500 mensuales, apoyándose en un índice de precios al consumidor (IPC) de 5.5 para el 2004 certificada por el Departamento Nacional de estadística.

   a. ¿Cuál es el incremento del salario mensual?

   b. ¿A qué porcentaje corresponde?

   c. ¿Cuál debe de ser aproximadamente el incremento relativo mensual durante el 2005 si se aspira a mantener el porcentaje calculado en b?

   d. Si en su familia se presentan dificultades para equilibrar los egresos con los ingresos, ¿Qué les propondría para solucionar el problema?

2. El DANE en el último censo de población que se realizó en el país, en 1993, calculó para cierta región una tasa de crecimiento de la población del 2% anual. En cierto momento, la población era de 350.000 habitantes y 10 años más tarde era de 500.000.

   a. ¿Cuál fue el incremento relativo de la población?

   b. ¿Se cumplió la meta de crecimiento, estimado en el 2% anual?

   c. Si el crecimiento es muy superior a lo esperado, se puede hablar de explosión demográfica. ¿Qué problemas podrían generarse y que soluciones propondría?

ESTUDIO Y ADAPTACIÓN DE LA GUÍA

GUÍA 2

Y ¿QUÉ ES LA DIFERENCIACIÓN DE FUNCIONES?

Mediante el cálculo diferencial, los científicos de la Nasa pueden determinar la velocidad a la que se desplaza el transbordador Atlantis en cualquier instante, mediante la aplicación de la derivada de una función.

INDICADORES DE LOGROS:

- Establece las fórmulas para derivar las funciones algebraicas, las identifica y las usa con solvencia.
- Identifica las funciones implícitas y les calcula la derivada.
- Reconoce las características personales y grupales del liderazgo (LIDERAZGO).
- Reconoce las necesidades, talentos y conocimientos de los integrantes del grupo.
- Genera confianza, credibilidad y respeto frente al grupo.
- Se adapta fácilmente a las condiciones del entorno en el cual interactúa.
- Genera visión compartida entre los integrantes del grupo.
- Es capaz de redefinir tareas y metas comunes de acuerdo a los intereses colectivos y las circunstancias en las cuales se encuentre el grupo.
- Aporta sus habilidades y capacidades para facilitar la solución de problemas de manera asertiva.

Con los compañeros leemos y analizamos el siguiente contenido:

Además del manejo de fórmulas para la diferenciación de funciones que vamos a desarrollar en esta guía, también trataremos la competencia laboral general. **Liderazgo**, que está relacionada con "la capacidad que las personas tienen para dinamizar y potenciar los conocimientos, habilidades, talentos y destrezas de los miembros de un grupo, para facilitar el trabajo colectivo de acuerdo a sus intereses, necesidades y metas comunes de desarrollo". (tomado del PROYECTO: "EDUCACIÓN MEDIA, CON PROFUNDIZACIÓN EN EDUCACIÓN PARA EL TRABAJO").

Como se ve, no se trata de que una sola persona lidere las actividades del subgrupo sino que todos se deben apersonar y pensar "qué tanto se logra hacer con el trabajo y no qué tan duro se trabaja".

El liderazgo permite que todos los miembros avancen con un ritmo satisfactorio.
En un sentido más personal, con el liderazgo se busca promover en los grupos la capacidad de descubrir, fortalecer y potenciar las competencias, habilidades y destrezas que cada persona posee, ocultas o no, para ponerlas al servicio de un grupo, y con ello motivarla a hacer cosas que no había pensado eran posibles de realizar por su propia cuenta a favor de los intereses colectivos.

¿Qué retos importantes enfrentamos como grupo que demandan que ejerzamos liderazgo?
¿Qué capacidades o habilidades deberíamos desrrollar para llegar a ser líderes?

No sólo en el desarrollo de las actividades sino también en otras ocasiones hemos puesto a prueba la capacidad de liderazgo.

A

Sea $F(x) = 3X^2 - 2X + 4$ Con los compañeros del subgrupo calculamos la derivada de la función "Y" con respecto de la variable independiente "X" usando la definición vista en la guía anterior.

Trabajemos, pues, en subgrupo atendiendo a los conceptos del liderazgo, tales como: reconocimiento de necesidades y talentos de los integrantes; la definición de las tareas y metas que debe alcanzar el grupo en esta guía.

Para ello leemos, analizamos y consignamos en el cuaderno de matemáticas lo que aparece en el recuadro verde. Si es preciso, volvemos a resolver los ejemplos hasta comprender y apropiarnos del proceso.

El cálculo de la derivada de una función usando la definición es bastante largo y por esta razón se han ideado fórmulas que permiten abreviar considerablemente su búsqueda.

FÓRMULAS PARA DERIVAR LAS FUNCIONES ALGEBRAICAS

1. Si $Y = C$ entonces $\frac{dY}{dx} = \frac{dC}{dx} = 0$, que se enuncia: "La derivada de una constante con respecto a una variable es igual a cero").

2. Si $Y = V$ entonces $\frac{dY}{dV} = \frac{dV}{dV} = 1$, que se enuncia: "La derivada de una variable con respecto a sí misma es igual a uno".

3. Si $Y = CV$ entonces $\frac{dY}{dx} = \frac{d(CV)}{dx} = C\frac{dV}{dx}$, que se enuncia: "La derivada de una constante por una variable es igual a la constante por la derivada de la variable".

4. Si $Y = S_1 + S_2$ entonces $\frac{dY}{dx} = \frac{d(S_1 + S_2)}{dx} = \frac{d\,S_1}{dx} + \frac{d\,S_2}{dx}$, que se enuncia: "La derivada de una suma es igual a la suma de las derivadas de los sumandos".

5. Si $Y = P^n$ entonces $\frac{dY}{dx} = \frac{dP^n}{dx} = nP^{n-1}\frac{dP}{dx}$, que se enuncia: "La derivada de una potencia es igual al exponente, por la base con el exponente disminuido en uno y por la derivada de la base".

6. Si Y = P*S entonces $\frac{dY}{dx} = \frac{d(P * S)}{dx} = P\frac{dS}{dx} + S\frac{dP}{dx}$, que se enuncia:

"La derivada de un producto de dos factores variables es igual al primer factor por la derivada del segundo, mas el segundo factor por la derivada del primero".

7. Si Y = $\frac{N}{D}$ entonces $\frac{dY}{dx} = \frac{d\frac{N}{D}}{dx} = \frac{D\frac{dN}{dx} - N\frac{dD}{dx}}{D^2}$, que se enuncia:

"La derivada de un cociente entre dos variables es igual al denominador por la derivada del numerador, menos el numerador por la derivada del denominador y esta diferencia entre el cuadrado del denominador".

Estas fórmulas se pueden deducir usando la definición de derivada de una función, como se procedió en los ejemplos resueltos antes.

Es muy importante memorizar, identificar y usar adecuadamente las fórmulas para derivar las funciones algebraicas, pues el resto del programa de cálculo se fundamenta en ellas.

En los siguientes ejemplos, se muestra cómo deben manejarse las fórmulas para resolver paso a paso cada ejercicio. Por tanto, de manera concienzuda, todos los integrantes del subgrupo deberán tratar de interiorizar las justificaciones que se dan, esforzándose por identificar, comprender y aplicar las fórmulas que permiten calcular las derivadas de las funciones que se plantean, tratando de aplicar dichas fórmulas de manera directa, sin necesidad de indicarlas. Como el liderazgo nos invita a que todo el grupo tenga éxito, quienes avancen más rápido pueden ayudar a quienes presentan dificultades en la comprensión del tema.

1. $Y = 4 + 2X - 3X^2 - 8X^3$

$\frac{dY}{dx} = \frac{d(4+2X - 3X^2 - 8X^3)}{dx}$ (Indicamos $\frac{d}{dx}$ a los dos lados de la igualdad)

$\frac{dY}{dx} = \frac{d4}{dx} + \frac{d(2X)}{dx} - \frac{d(3X^2)}{dx} - \frac{d(8X^3)}{dx}$ (porque la derivada de una suma es igual a la suma de las derivadas de los sumandos)

$\frac{dY}{dx} = 0 + 2\frac{dX}{dx} - 3\frac{dX^2}{dx} - 8\frac{dX^3}{dx}$ (En el primer sumando se tiene la derivada de una constante que es igual a 0; en los otros tres sumando se ve la derivada de una constante por una variable, que igual a la constante por la derivada de la variable)

$$\frac{dY}{dx}=2(1)-3(2X^{2-1}\frac{dX}{dx})-8(3X^{3-1}\frac{dX}{dx})$$ (En el segundo sumando se tiene la derivada

de una variable respecto de sí misma que es 1; en los otros dos sumandos aparece la derivada de una potencia que igual al exponente, por la base con su exponente disminuido en 1 y por la derivada de la base)

$$\frac{dY}{dx}=2-6X-24X^{2}$$ (Efectuando las operaciones se obtiene la respuesta, puesto que

la derivada de una variable respecto de sí misma es 1)

En la práctica, el proceso se agiliza si antes de empezar se analiza la expresión para identificar que se trata de una suma, el primer sumando es una constante, los otros son constante por variable y en los dos últimos la variable es una potencia de base simple. Por tanto, las fórmulas se aplican de manera inmediata, así:

$Y' = 0 + 2(1) - 3(2X)(1) - 8(3X^2)(1)$ o sea $Y' = 2 - 6X - 24X^2$

2. $Y=\frac{1}{X}+\frac{3}{X^2}-\frac{2}{X^3}$

$$\frac{dY}{dx}=\frac{d(\frac{1}{X}+\frac{3}{X^2}-\frac{2}{X^3})}{dx}$$ (Indicando $\frac{d}{dx}$ a los dos lados de la igualdad)

$$\frac{dY}{dx}=\frac{d\frac{1}{X}}{dx}+\frac{d\frac{3}{X^2}}{dx}-\frac{d\frac{2}{X^3}}{dx}$$ (Porque al lado derecho hay una suma)

(En cada sumando aparece un cociente de una constante sobre una variable, situación que puede cambiarse a constante por variable pasando cada variable al numerador, cambiando el signo del exponente; con esta transformación evitamos usar la fórmula para derivar un cociente entre variables, que es bastante larga).

$$\frac{dY}{dx}=\frac{d1X^{-1}}{dx}+\frac{d3X^{-2}}{dx}-\frac{d2X^{-3}}{dx}$$

$$\frac{dY}{dx}=1X^{-2}\frac{dX}{dx}+3(-2X^{-3}\frac{dX}{dx})-2(-3X^{-4}\frac{dX}{dx})$$ (En todos los sumandos hay constante

por variable y la variable es una potencia).

$$\frac{dY}{dx} = -X^{-2}-6X^{-3}+6X^{-4}$$ (porque $\frac{dX}{dx}$ es igual a 1)

$$\frac{dY}{dx} = -\frac{1}{X^2} - \frac{6}{X^3} + \frac{6}{X^4}$$ (Trasformando nuevamente los exponentes negativos)

$Y = \frac{1}{X} + \frac{3}{X^2} - \frac{2}{X^3}$ Para realizar el ejercicio más rápido, lo reescribimos sin los denominadores variables, así:

$Y = 1X^{-1} + 3X^{-2} - 2X^{-3.}$ Se observa que a la derecha aparece una suma, cada sumando es constante por variable y cada variable es una potencia. Luego:

$$Y' = 1\ (-1X^{-2})\ ((1) + 3(-2X^{-3})(1) - 2(-3X^{-4})(1)$$

Volviendo a escribir sin exponentes negativos, queda:

$Y' = -\frac{1}{X^2} - \frac{6}{X^3} + \frac{6}{X^4}$, resultado igual al obtenido antes.

3. $Y = (3 - X^2)^4$

$$\frac{dY}{dx} = \frac{d(3\text{-}X^2)^4}{dx}$$ (Tomando $\frac{d}{dx}$ a los dos lados de la igualdad)

$$\frac{dY}{dx} = 4(3 - X^2)^3 \frac{d(3 - X^2)}{dx}$$ (Se trata de la derivada de una potencia que es igual al exponente, por la base con el exponente disminuido en 1 y por la derivada de la base).

$$\frac{dY}{dx} = 4(3 - X^2)^3\ (0 - 2X\ )$$ (La derivada indicada corresponde a una suma)

$$\frac{dY}{dx} = -8X\ (3 - X^2)^3$$ (Efectuando la multiplicación se obtiene la solución)

El resultado se obtiene más rápido observando que a la derecha aparece una potencia y aplicando la fórmula correspondiente, así:

$Y' = 4\ (3 - X^2)^3\ (-2X) = -8X(3 - X^2)^3$, resultado igual al anterior.

4. $Y = 2X^{\frac{1}{2}} + 6X^{\frac{1}{3}} - 2X^{\frac{3}{2}}$

$\frac{dY}{dx} = \frac{d(2X^{\frac{1}{2}} + 6X^{\frac{1}{3}} - 2X^{\frac{3}{2}}}{dx}$ (Aplicando $\frac{d}{dx}$ a los dos lados de la igualdad)

$\frac{dY}{dx} = 2\frac{dx^{\frac{1}{2}}}{dx} + 6\frac{dx^{\frac{1}{3}}}{dx} - 2\frac{dx^{\frac{3}{2}}}{dx}$ (Se trata de una suma y cada sumando es una constante por una variable)

$\frac{dY}{dx} = 2[\frac{1}{2}X^{-\frac{1}{2}}(1)]+6[\frac{1}{3}X^{-\frac{2}{3}}(1)]-2[\frac{3}{2}X^{\frac{1}{2}}(1)]$ (La variable es una potencia)

$\frac{dY}{dx} = \frac{1}{X^{\frac{1}{2}}} + \frac{2}{X^{\frac{2}{3}}} - 3X^{\frac{1}{2}}$ (Simplificando y escribiendo sin exponentes negativos)

5. $Y = \sqrt[3]{3X^2} - \frac{1}{\sqrt{5X}}$

Como no estamos usando una fórmula para derivar un radical, se debe reescribir la expresión sin el símbolo de radical, pero sin alterarla:

$Y = (3X^2)^{\frac{1}{3}} - (5X)^{-\frac{1}{2}}$

$\frac{dY}{dx} = \frac{1}{3} + (3X^2)^{-\frac{2}{3}}\frac{d(3X^2)}{dx} - (-\frac{1}{2})(5X)^{-\frac{3}{2}}\frac{d5X}{dx}$ (Es una suma y cada sumando es una potencia)

$\frac{dY}{dx} = \frac{1}{3} + (3X^2)^{-\frac{2}{3}}(6X) - (-\frac{1}{2})(5X)^{-\frac{3}{2}}(5)$ (Derivando donde se pide)

$\frac{dY}{dx} = 2X(3X^2)^{-\frac{2}{3}} + \frac{5}{2}(5X)^{-\frac{3}{2}}$, que puede tomarse como solución)

6. $Y = (X^2 + 4)(2X^3 - 1)^3$

$\frac{dY}{dx} = \frac{d(X^2 + 4)(2X^3 - 1)^3}{dx}$ (Indicando $\frac{d}{dx}$ a los dos lados de la igualdad)

$$\frac{dY}{dx} = (X^2+4)\ \frac{d(2X^3 - 1)^3}{dx} + (2X^3-1)^3\ \frac{d(X^2 + 4)}{dx}$$ (La derivada del producto de dos factores variables es igual al primer factor por la derivada del segundo, mas el segundo por la derivada del primero).

$$\frac{dY}{dx} = (X^2+4)[3(2X^3- 1)^2]\ \frac{d(2X^3 - 1)}{dx} +(2X^3-1)^3 (2X + 0)$$ (La derivada de una potencia en la primera y la derivada de una suma en la última)

$$\frac{dY}{dx} = (X^2+4)\ [3(2X^3-1)^2]+(6X^2)+(2X^3 - 1)^3 (2X)$$ (Derivando en donde se indica).

$$\frac{dY}{dx} = 18X^2\ (X^2+4)\ (2X^3-1)^2+ 2X\ (2X^3-1)^3$$ (Operando los monomios y escribiéndolos adelante).

7). $Y = \dfrac{3-X^2}{1-2X}$

$$\frac{dY}{dx} = \frac{d\,\frac{3-X^2}{1-2X}}{dx}$$ (Tomando $\dfrac{d}{dx}$ a los dos lados de la igualdad).

$$\frac{dY}{dx} = \frac{(1-2X)\ \frac{d(3-X^2)}{dx}\ -(3-X^2)\ \frac{d(1-2X)}{dx}}{(1-2X)^2}$$ (La derivada del cociente entre dos variables es igual al denominador por la derivada del numerador, menos el numerador por la derivada del denominador, y esta diferencia dividida por el cuadrado del denominador).

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1-2X)\ (-2X)-(3-X^2)\ (-2)}{(1-2X)^2}$$ (Derivando donde se indica)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2(X^2- X + 3)}{(1-2X)^2}$$ (Operando y reduciendo)

8. $X^2 + Y^2 = 3X - 4Y$

$$\frac{d(X^2+Y^2)}{dx} = \frac{d(3X - 4Y)}{dx}$$ (Tomando $\dfrac{d}{dx}$ a los dos lados de la igualdad).

$\frac{dX^2}{dx} + \frac{dY^2}{dx} = \frac{d3X}{dx} - \frac{d4Y}{dx}$ (Tanto a la izquierda como a la derecha de la igualdad aparece la derivada de una suma).

$2X\frac{dX}{dx} + 2Y\frac{dY}{dx} = 3\frac{dX}{dx} - 4\frac{dY}{dx}$ (A la izquierda aparece derivada de una potencia en los dos sumandos y a la derecha, derivada de una constante por una variable, también en los dos sumandos).

$2X + 2Y\frac{dY}{dx} = 3 - 4\frac{dY}{dx}$ (Porque $\frac{dX}{dx}$ es igual a 1).

$2Y\frac{dY}{dx} + 4\frac{dY}{dx} = 3 - 2X$ (Reuniendo a la izquierda los términos que contienen $\frac{dY}{dx}$)

$\frac{dY}{dx}(2Y + 4) = 3 - 2X$ (Factorizando a la izquierda)

$\frac{dY}{dx} = \frac{3 - 2X}{2Y + 4}$ (Despejando $\frac{dY}{dx}$, resulta la derivada de la función)

Una expresión como la planteada en el ejemplo 8, se llama una relación implícita debido a que la "Y" no aparece despejada y para hallar la derivada es suficiente diferenciar a los dos lados de la igualdad, aplicar las fórmulas adecuadas y al final, por métodos algebraicos, despejar $\frac{dY}{dx}$.

Para resolver las siguientes actividades, vamos a actuar como un subgrupo líder a nivel del aula; para ello aprovechemos la habilidad de los que más saben, repartamos los trabajos y tareas entre todos para que cada uno de nosotros aporte lo que sabe; asumimos y cumplimos los compromisos que convengan al grupo.

Como se dijo antes, la derivación es un concepto que aparecerá frecuentemente en el curso de cálculo diferencial y por tanto es preciso afianzar muy bien la identificación, aplicación y manejo eficiente de las fórmulas vistas. En consecuencia, echando mano de los conceptos, fórmulas y ejercicios resueltos desarrollo lo siguiente (intento realizar los ejercicios aplicando las fórmulas de manera inmediata), comparto resultados con mis compañeros para determinar la capacidad de adaptación y de redefinición de tareas para la comprensión y solución de los ejercicios. Revisamos nuestros conocimientos con el profesor, en procura de detectar y corregir posibles fallas.

Mediante las fórmulas adecuadas, hallo $\frac{dY}{dx}$

a) $Y = 5X^3 - 3X^2 + 6X - 2$

b) $Y = (2 - 3X)^4$

c) $Y = \sqrt{X^2 - 6X + 3}$

d) $Y = \frac{1}{3}X^3 - \frac{1}{2}X^2 + X - 1$

e) $F(x) = X^{-2} + \frac{7}{X^3} + 4$

f) $Y = X^3(2 - 3X)^2$

g) $G(x) = \frac{2X + 1}{6 - X}$

h) $X + Y = X^2 - 3$

i) $Y^2 - 3X = X^2 + 4Y$

j) $X^2Y + 3 = 1 - XY^2$

En vista de la importancia que tiene la diferenciación de funciones en el cálculo infinitesimal, nuestro subgrupo, actuando como líder, propone ejercicios de diferenciación donde se deben aplicar las diferentes fórmulas para derivar las funciones algebraicas, tratamos de emularnos con el objetivo de dominar el tema y no por competir. Compartimos nuestra experiencia con el profesor.

Para aplicar las fórmulas de derivación de las funciones algebraicas a la vida cotidiana, debemos primero dar interpretación geométrica al concepto de derivada, tema que se tratará más adelante.

ESTUDIO Y ADAPTACIÓN DE LA GUÍA