Grado 11o

EDUCACIÓN MEDIA CON PROFUNDIZACIÓN EN EDUCACIÓN PARA EL TRABAJO

INSTITUCIONES PARTICIPANTES DEL PROYECTO:
Fundación Luker
Comité de Cafeteros de Caldas
Corpoeducación
Instituto Caldense para el Liderazgo
Secretaría de Educación de Manizales
Universidad Autónoma de Manizales

CÁLCULO

UNIDADES 4 · 5 · 6 · 7

Impresión: Carvajal Soluciones de Comunicación S.A.S.
Marzo 2020

Grado 11o

EDUCACIÓN MEDIA CON PROFUNDIZACIÓN EN EDUCACIÓN PARA EL TRABAJO

Autor Cálculo:
ABEL ANTONIO AGUDELO CARMONA
Licenciado en matemáticas - Universidad Católica-
Posgrado en computación para la docencia -Universidad Antonio Nariño-

Asesoría y Coordinación:
Mg. RUBIEL TRUJILLO ARIAS
Lic. JOSÉ RAÚL OSPINA OSORIO
I.A. CLAUDIA MILENA CARDONA TORRES
Consultora Asociada Corpoeducación LILIANA GONZÁLEZ ÁVILA

Diseño y diagramación:
ESPACIO GRÁFICO COMUNICACIONES S.A.

CÁLCULO

UNIDADES 4 · 5 · 6 · 7

PRESENTACIÓN

El presente módulo de interaprendizaje para grado 11º hace parte de la estrategia de ampliación de cobertura en educación media para el área rural del departamento de Caldas. Este material pedagógico, el cual sigue los principios y fundamentos del Programa Escuela Nueva, ofrece los contenidos generales del área de Cálculo de acuerdo con los estándares curriculares y promueve en los estudiantes el desarrollo de competencias laborales generales, las cuales les permitirán desempeñarse exitosamente en su vida productiva futura.

El diseño de este material se realizó en el marco del Proyecto de **EDUCACIÓN MEDIA CON PROFUNDIZACIÓN EN EDUCACIÓN PARA EL TRABAJO** adelantado por el Comité de Cafeteros de Caldas, con el importante concurso de la Fundación Luker, quien aportó el capital semilla para el diseño y puesta en marcha de la propuesta de educación media para el área rural del departamento de Caldas, Corpoeducación, el Instituto Caldense para el Liderazgo, la Universidad Autónoma de Manizales y la Secretaría de Educación de Manizales, éstas últimas instituciones pusieron a disposición del proyecto su experiencia en el desarrollo de proyectos educativos, orientados hacia la educación para el trabajo.

Esta primera versión de módulos para el grado 11º debe considerarse como material de prueba y por lo tanto estará sujeto a las modificaciones que se requieran, tanto en contenido como en presentación.

Adicionalmente, este módulo maneja un componente transversal de proyecto de vida, con el ánimo de atender las necesidades de los jóvenes con relación a su orientación vocacional.

Agradecemos a los autores por sus conocimientos, dedicación y esfuerzo puesto en el diseño del presente módulo de interaprendizaje con Metodología Escuela Nueva.

ELSA INÉS RAMÍREZ MURCIA

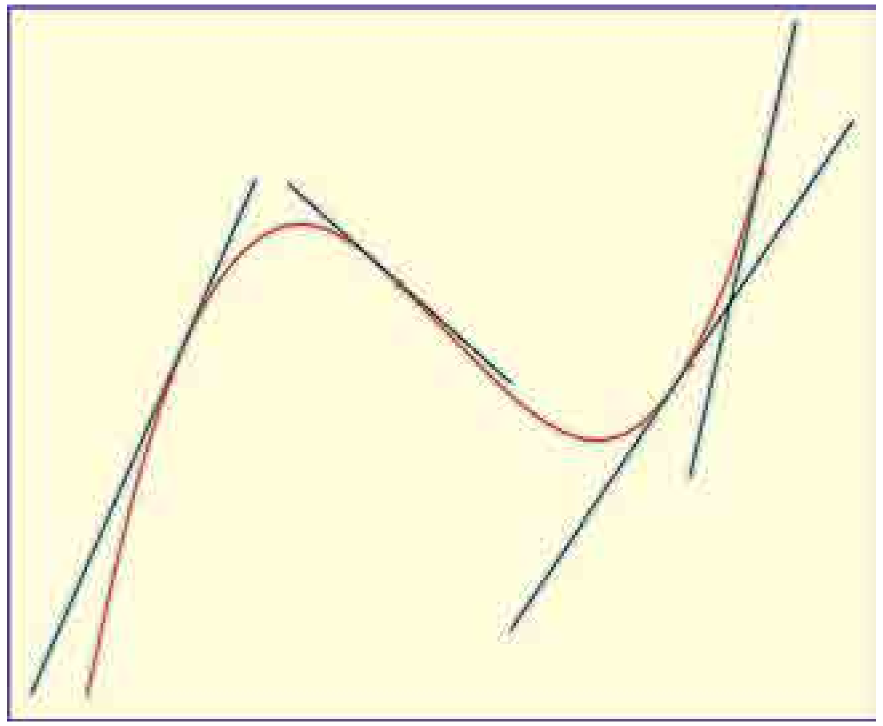
Coordinadora Programas de Formación y Educación°

Comité de Cafeteros de Caldas

CONTENIDO

UNIDAD 4

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA DE UNA FUNCIÓN Y SUS APLICACIONES



Históricamente la derivada surge para resolver el problema del trazado de la tangente a una curva plana en uno de sus puntos. En la figura se observan varias tangentes trazadas a la curva en algunos puntos de ella.

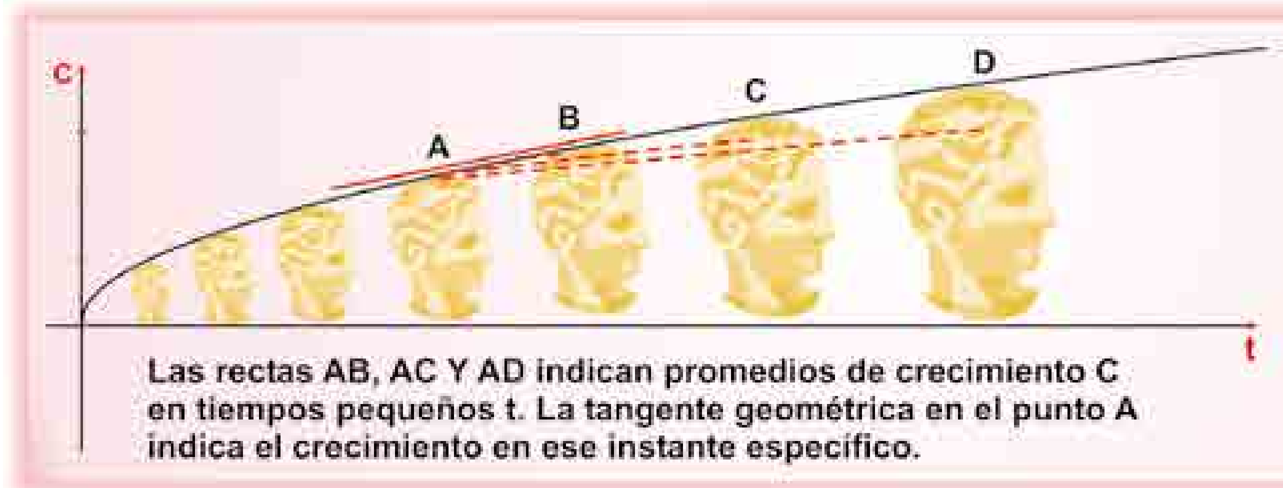
LOGROS

- Interpreta la derivada de una función en un punto como la pendiente de la tangente geométrica en ese punto
- Calcula las ecuaciones de la tangente geométrica y de la normal a una curva en un punto dado y las grafica
- Define y calcula los valores extremos de una función y usa el resultado para bosquejar la curva

- Aplica en el diseño y la construcción la teoría de los máximos o mínimos de una función
- Aplica correctamente la derivada de una función para resolver problemas acerca de rapidez de cambio, velocidad instantánea y aceleración
- Usa el teorema de L'Hôpital para eliminar más fácilmente algunas formas indeterminadas usando la derivada
- Maneja acertadamente el conflicto y contribuye positivamente a su solución (MANEJO DEL CONFLICTO)
- Analiza, elige y pone en marcha alternativas de solución (TOMA DE DECISIONES)
- Orienta sus acciones y procesos a la satisfacción de necesidades de los otros (ORIENTACIÓN AL SERVICIO)
- Dinamiza procesos con métodos y enfoques innovadores (CREATIVIDAD)
- Contribuye con su actitud y comportamiento a mejorar el ambiente (RESPONSABILIDD AMBIENTAL)

GUÍA 1

¿CÓMO INTERPRETAR GEOMÉTRICAMENTE LA DERIVADA DE UNA FUNCIÓN?



INDICADORES DE LOGRO

- Reconoce en la derivada de una función la pendiente de la tangente geométrica en un punto de ella
- Dada una función, calcula adecuadamente la ecuación de la recta que es tangente geométrica a la curva en cierto punto
- Define la recta normal a una curva y calcula su ecuación usando la derivada de la función
- Identifica los conflictos que surgen en su entorno y sus posibles causas **(MANEJO DEL CONFLICTO)**
- Reconoce las potencialidades y limitaciones, al igual que las de su grupo
- Reconoce y respeta la diversidad de actitudes y opiniones
- Propicia encuentros que permiten el acercamiento entre las partes en conflicto
- Participa activamente en las discusiones, explora y propone alternativas de solución

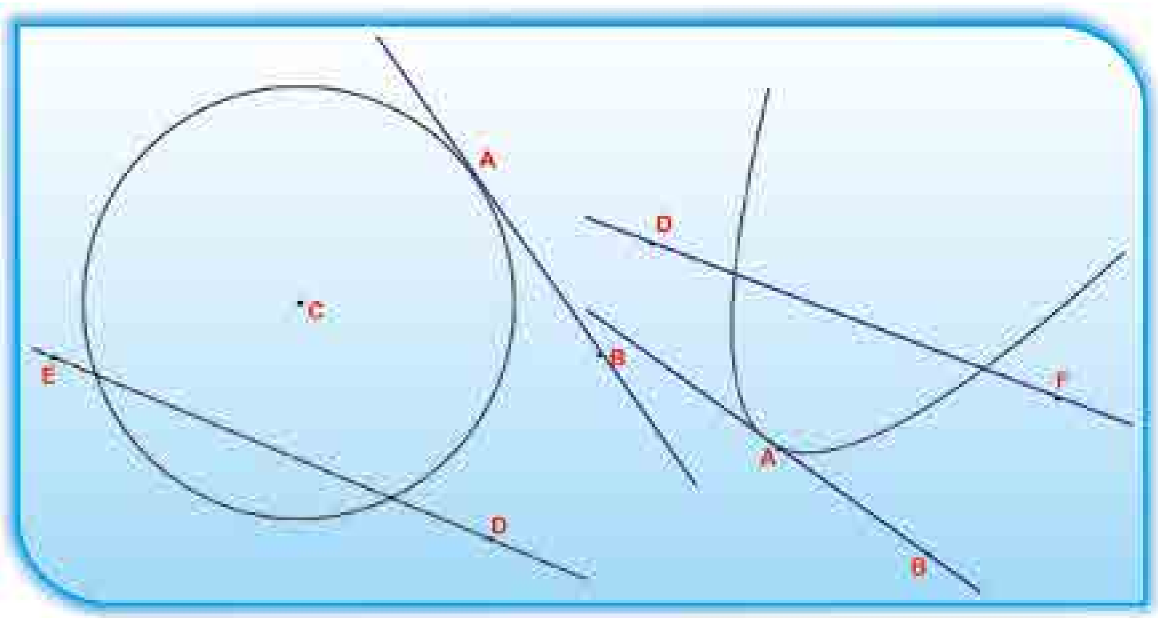
Con los compañeros leemos y analizamos el contenido que aparece a continuación. Amén de la interpretación geométrica de la derivada que vamos a estudiar en esta guía, también trataremos la **C.L.G. MANEJO DEL CONFLICTO**, que se entiende como "Discutir intereses u opiniones entre individuos o grupos causa un choque, a veces irreconciliable, entre ellos. La existencia del conflicto está aceptada como una parte inevitable del funcionamiento social. El conflicto es el resultado de la competencia entre dos o más partes; una de las cuales puede ser una persona, una familia, una institución o una comunidad entera".

Estemos pues, atentos a los conceptos y actividades que encontremos en la guía, relacionados con esta competencia.

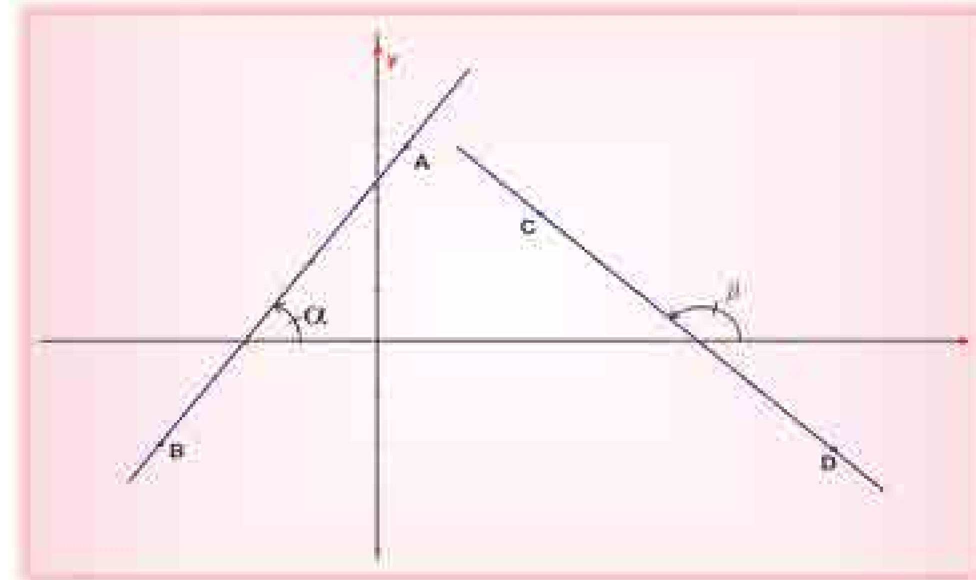
A

Leo, analizo y comparto con un compañero lo siguiente. Si necesito escribir, lo hago en mi cuaderno de matemáticas.

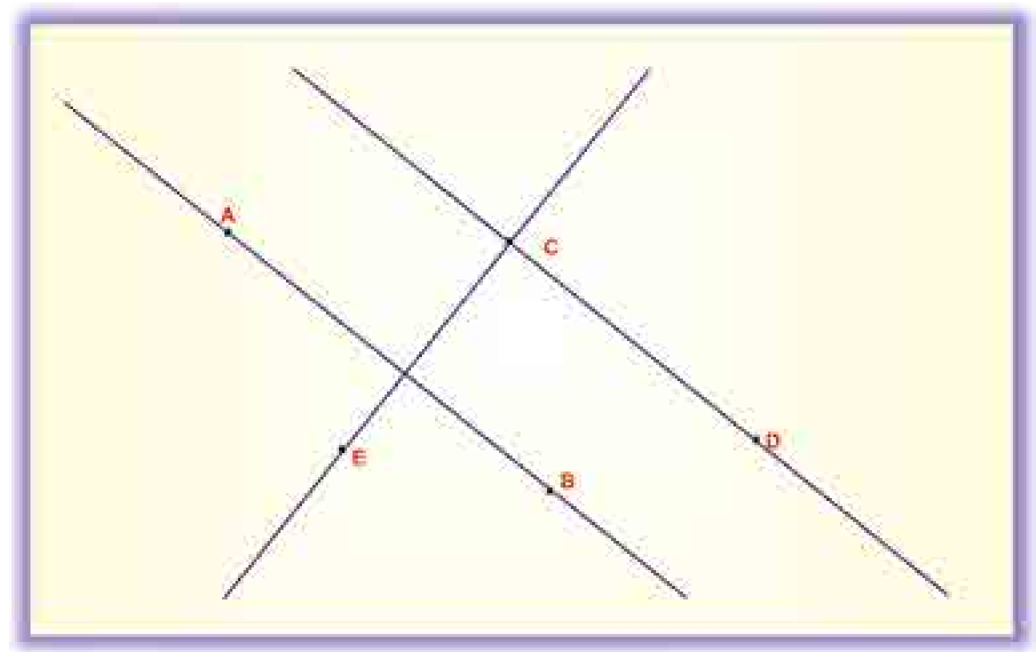
En la figura siguiente, y con relación a cada curva, identifico: ¿Cuáles rectas son secantes? y ¿Cuáles son tangentes? Justifico mis respuestas.



En esta otra gráfica, ¿Qué es α con relación a la recta AB? y ¿Qué es β respecto de la recta CD?. Defino la pendiente para cada una de las rectas AB y CD.



Igualmente, en la siguiente gráfica las rectas AB y CD son paralelas ¿Cómo son sus pendientes? y las rectas AB y CE son perpendiculares ¿Cómo son sus pendientes?



Una recta pasa por los puntos A(2, -3) y B(1, 4). La dibujo en el plano cartesiano y luego encuentro su ecuación.

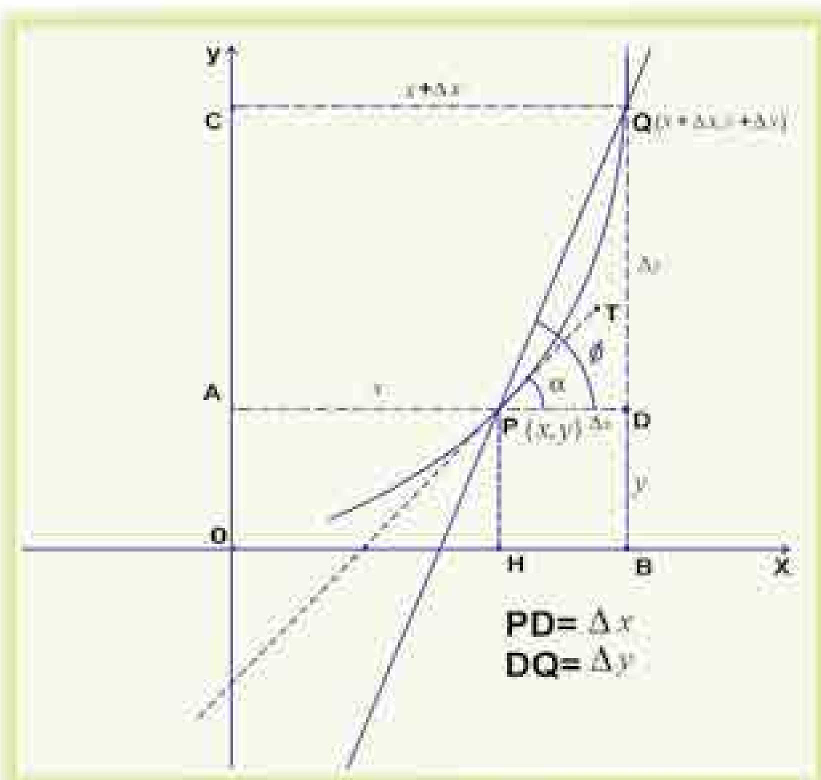
Si tengo dificultades con las respuestas, aclaro mis dudas acudiendo a geometría analítica.

Si al compartir mi trabajo con el compañero surgen algunos puntos de vista diferentes, buscamos las causas y proponemos alternativas para salir del impase.

INTERPRETEMOS GEOMÉTRICAMENTE LA DERIVADA

Leo, interpreto y anoto en mi cuaderno de matemáticas los conceptos que aparecen en el recuadro verde, analizando rigurosamente los ejemplos propuestos. Si lo requiero, elaboro gráficas.

Sea Y = F(x) una función cuya gráfica es la curva que muestra la figura:



Sea P(x,y) un punto que le pertenece a la curva. Si se incrementan, tanto "X" como "Y" en Δx y Δy , respectivamente, resulta otro punto $Q(x+\Delta x,\ y+\Delta y)$ que también le pertenece a la curva.

Tracemos la secante PQ cuya inclinación es el ángulo ϕ. Si calculamos su pendiente, se tiene: (1) $m_{PQ} = Tan\phi = \dfrac{DQ}{PD} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ (cateto opuesto sobre cateto adyacente).

Si hacemos que Q recorra la curva, aproximándose indefinidamente a P, llegará un momento en el que Q se confunde con P; ϕ será igual a α ; la secante QP se confundirá con la tangente PT, en tanto que Δx tenderá a cero. En estas condiciones, podemos escribir :

(2) $m_{PT} = \lim\limits_{Q \to P} PQ = \lim\limits_{\phi \to \alpha} Tan\phi = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Y dando el paso al límite, resulta:

(3) $m_{PT} = Tan\alpha = \dfrac{dy}{dx}$, por la definición de derivada de una función.

CONCLUSIÓN: la derivada de una función en un punto P de ella es la pendiente de la tangente geométrica a la función en dicho punto.

Una importante aplicación de este principio lo encontramos en el cálculo de la TANGENTE geométrica a una curva en un punto P(x,y) de ella.

Ejemplo 1, hallar la ecuación de la tangente geométrica a la función $Y = X^2$ en el punto P(2,4).

Solución:

(1) $Y - Y_1 = m_t(X - X_1)$ (Ecuación general de la recta)

(2) $m_t = \dfrac{dy}{dx} = 2X$ (Derivando con respecta a X la función $Y=X^2$)

(3) $m_t = 2(2) = 4$ (Valor de la pendiente cuando X=2)

(4) Y - 4 = 4(X - 2) (Reemplazando Y_1, X_1 y m_t en la (1))

(5) Y = 4X - 4 ó 4X - y - 4 = 0 (Que es la ecuación de la tangente).

LA RECTA NORMAL: se llama NORMAL a una curva a la recta que es perpendicular a la TANGENTE geométrica por el punto de tangencia.

Ejemplo 2: en el ejercicio anterior, hallar la ecuación de la normal en el punto P(2,4).

Solución

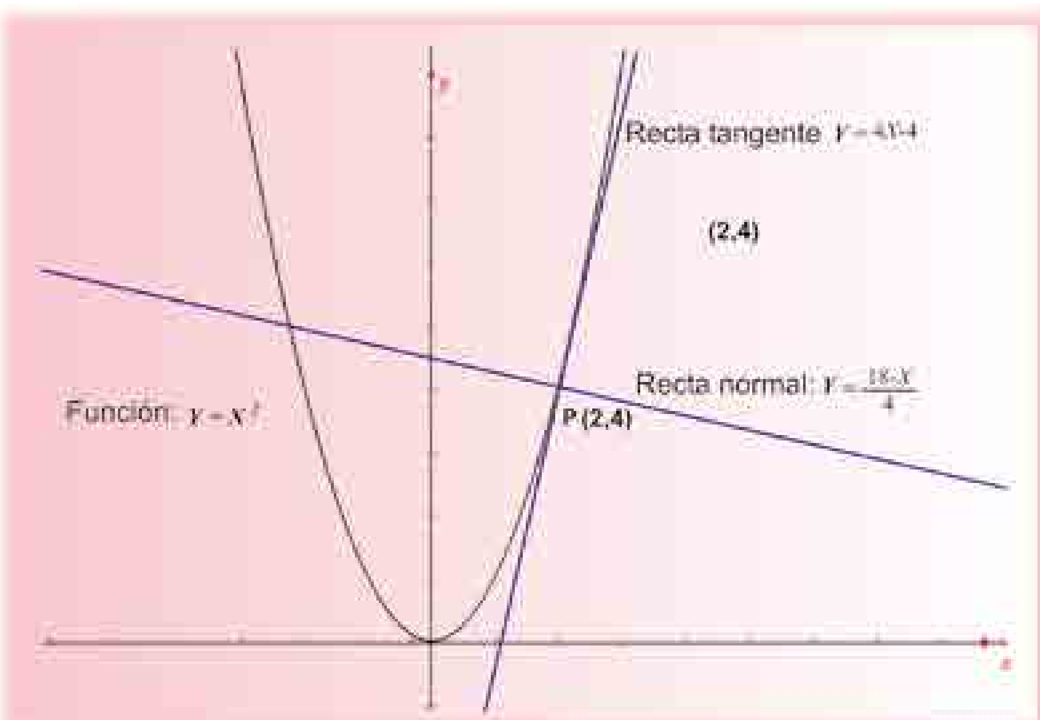
(1) $Y - Y_1 = m_n (X - X_1)$ (Ecuación general de la recta)

(2) Si $m_t = 4 \Rightarrow m_n = -\frac{1}{4}$ (Dos rectas son perpendiculares cuando sus pendientes son INVERSAS y de signo contrario).

(3) $Y - 4 = -\frac{1}{4}(X - 2)$ (Reemplazando Y, X_1 y m_n en la (1))

(4) $Y = \frac{18 - X}{4}$ ó X + 4Y - 18 = 0 (Que es la ecuación de la normal).

En la gráfica, se ven la función, la recta tangente y la recta normal en P.



Ejemplo 3: dada la función $Y = \frac{2}{X+3}$, hallar las ecuaciones de la tangente y de la normal en el punto P cuya abscisa es 1.

Solución:

Calculamos la segunda coordenada reemplazando el valor de X en la función dada:

$Y = \frac{2}{1+3} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Luego el punto es $P(1, \frac{1}{2})$

(1) $Y - Y_1 = m_t(X - X_1)$ (Ecuación general de la recta)

(2) $m_t = \frac{dy}{dx} = -\frac{2}{(X+3)^2}$ (Derivando con respecto a X la función $Y = \frac{2}{X+3}$)

(3) $m_t = -\frac{2}{(1+3)^2} = -\frac{2}{16} = -\frac{1}{8}$ (Valor de la pendiente cuando X=1)

(4) $Y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{8}(X - 1)$ (Reemplazando Y_1, X_1 y m_t en la (1))

(5) X + 8Y - 5 = 0 (Que es la ecuación de la tangente)

Para la recta normal:

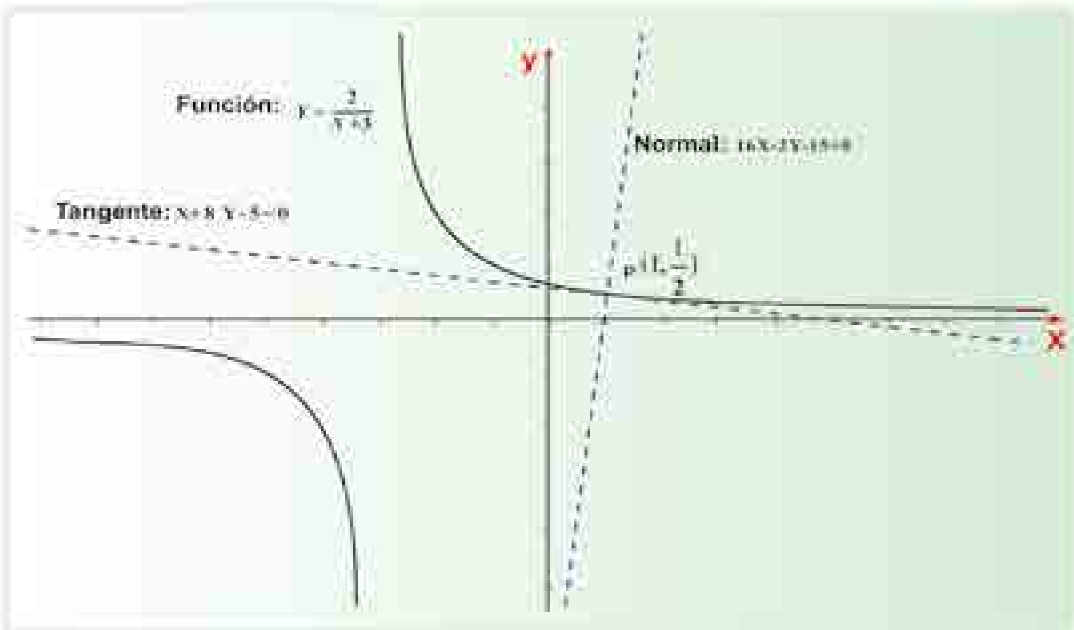
(1) $Y - Y_1 = m_n(X - X_1)$ (Ecuación general de la recta)

Si $m_t = \frac{1}{8} \rightarrow m_n = 8$ (Dos rectas son perpendiculares cuando sus pendientes son INVERSAS y de signo contrario).

(2) $Y - \frac{1}{2} = 8(X - 1)$ (Reemplazando Y_1, X_1 y m_n en la (1))

(3) 16X - 2Y - 15 = 0 (Que es la ecuación de la normal).

Gráficamente, se muestra así:



Ejemplo 4: hallar la ecuación de la normal a la parábola $Y = 5X + X^2$ que forma un ángulo de 45º con el eje positivo de las X.

Solución: si la normal forma un ángulo de 45º con el positivo de las X, entonces pendiente es 1 y en consecuencia la pendiente de la tangente geométrica es -1. Luego para hallar el punto de tangencia basta hallar la derivada de la función, igualarla a -1, resolver la ecuación resultante para obtener el valor de la abscisa en dicho punto y luego calcular la ordenada, así:

(1) $Y = 5X + X^2$ (Función dada)

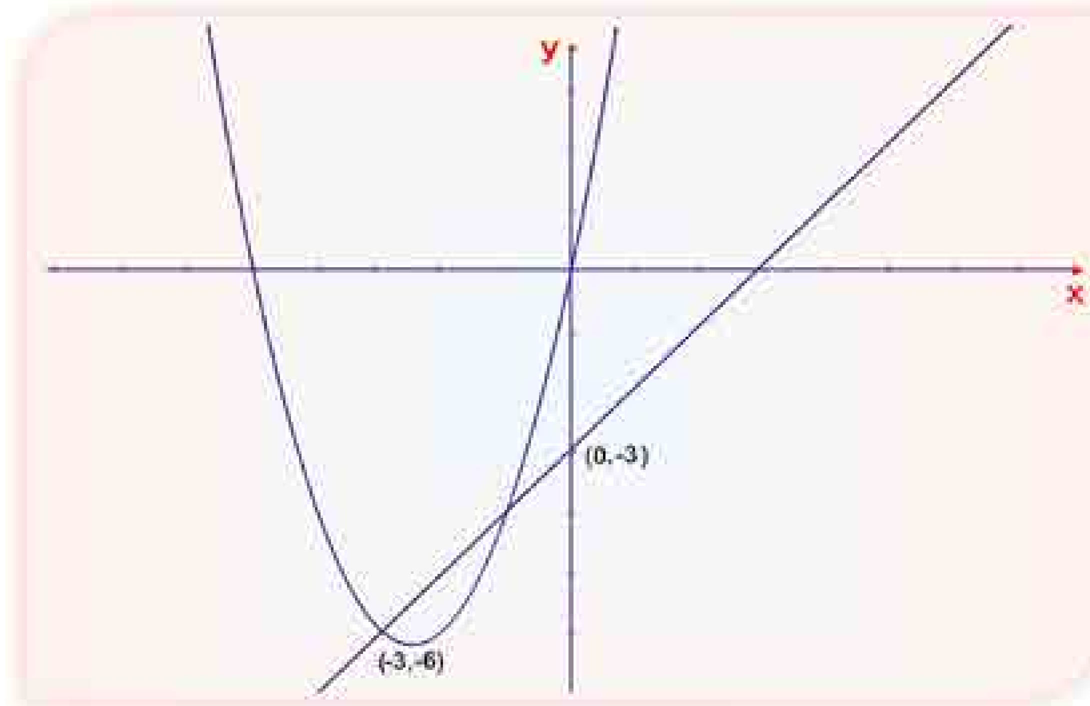
(2) $Y = 5X + X^2$ (Derivando la función dada)

(3) $5 + 2X = -1 \Rightarrow X = \dfrac{-6}{2} \Rightarrow X = -3$ (Se resuelve la ecuación para calcular la abscisa en el punto de tangencia)

(4) $f(x) = 5(-3) + (-3)^2 = -6$ (O sea que (-3, -6) es el punto de tangencia)

(5) $Y - Y_1 = m_n(X - X_1)$ (Ecuación general de la recta)

(6) Y + 6 = 1(X + 3) entonces X - Y -3 = 0 (Que es la ecuación de la normal, como se ve en la gráfica. Para poder dibujar la recta normal se calcula otro punto como el (0, -3), que le pertenece a la ecuación (6)).



Ahora que hemos interpretado geométricamente la derivada, volvamos sobre la solución del conflicto:

Cuando los conflictos aparecen deben ser manejados de modo inteligente, echando mano de la capacidad para reconocer situaciones de difícil salida entre las personas, los grupos o las instituciones y concertar las estrategias adecuadas para contribuir a su solución asertiva, es decir, de una manera más equilibrada y armónica, sin esperar a que se resuelvan solos, pues si nos salimos por la “tangente” es probable que “deriven” en conflictos más complejos. Por tanto debemos asumir un rol activo en dicha solución, expresando sentimientos y emociones de manera adecuada, sin herir al otro y considerando sus planteamientos y emociones.

Basándome en mis apuntes y en los ejercicios resueltos, afianzo mis conocimientos por medio del desarrollo consciente de los siguientes apartes:

1) En las siguientes funciones hallo las ecuaciones de la tangente y de la normal en el punto que se especifica y grafico la función, la tangente geométrica y la normal.

a) $Y = 2X^2$ en el punto A(1, 2)

b) $Y = 3X^3$ en el punto B((1, 3)

c) $Y = 3X^2 - 9X + 6$ en el punto C(0, 6)

2) Determino el punto (o los puntos) donde la pendiente de la recta tangente a la curva $Y = X^3 - 2X - 3$ es igual a 1.

3) Si $F(x) = 6X - X^2$, hallo las ecuaciones de la recta tangente y de la recta normal a la curva en el punto de abscisa X=2. También busco el punto sobre la curva donde la recta tangente es paralela al eje X.

4) Determino en qué punto la tangente geométrica a la curva $Y = X^3 + 5$ es:

a) Paralela a la recta $12X - Y = 17$

b) Perpendicular a la recta $X + 3Y = 2$

5) Calculo las ecuaciones de la recta tangente y de la recta normal para las siguientes curvas en el punto que se especifica:

a) $X^2 + XY - Y^2 = 1$ en el punto A(2, 3)
b) $X^2 + Y^2 = 25$ en el punto B(3, -4)

6) En las siguientes funciones determino los valores de X para los cuales $\frac{dy}{dx} = 0$:

a) $Y = X^3$
b) $Y = X^2 - 4X$

c) $Y = X^3 - 9X$
d) $Y = \sqrt{X + 1}$

7) El cálculo de la derivada, hasta este momento, se ha hecho sólo a funciones expresadas con fórmulas o descripciones verbales (de donde se infiere la fórmula). Pero los científicos e ingenieros trabajan frecuentemente con tablas de valores obtenidas a partir de observaciones o experimentos. Por ejemplo, en la figura siguiente se ve, a la derecha, una tabla que muestra la población de un país en períodos t de 10 años (desde 1800 hasta 1900) en millones de personas. Estimar la rapidez de cambio instantáneo de crecimiento de la población en 1850.

t	Año	Población en millones
0	1800	5.3
10	1810	7.2
20	1820	9.6
30	1830	12.9
40	1840	17.1
50	1850	23.2
60	1860	31.4
70	1870	38.6
80	1880	50.2
90	1890	62.9
100	1900	76.0

Solución: sea t=0 (años) en 1800, con lo cual t=50 (años) corresponde a 1850. A la izquierda de la figura anterior tenemos los datos graficados, con una curva suave que se adapta a los datos mostrados en la tabla.

Sin importar como se obtenga, una curva adaptada a los datos debe ser una buena aproximación de la gráfica real de la función desconocida P=F(t). (Para este caso, la gráfica se construyó en CABRI y se retocó en PAINT), utilizando 1 centímetro para representar 10 años en el eje horizontal o 10 millones en el eje vertical). La razón de cambio instantánea $\frac{dP}{dt}$ en 1850 es la pendiente de la recta tangente en el punto (50, 23.2). Se traza la tangente lo más aproximada posible, mediante una inspección visual y después se miden la base y la altura del triángulo que se ve en la figura. De esta manera se aproxima la pendiente de la tangente en t=50 años como

$\frac{dP}{dt} \approx \frac{36}{51} \approx 0.71$ millones de personas por año (en 1850). Aunque no hubo censo en 1851, se puede estimar que la población del país era de aproximadamente 23.2 + 0.71 = 23.9 millones.

Concluida la actividad, socializo con los integrantes del subgrupo y con el profesor, los resultados. En este tipo de trabajos se pueden presentar conflictos personales o grupales, por la heterogeneidad de conceptos. Para prevenir estas situaciones, hagamos una lectura y análisis a las siguientes recomendaciones, en:

COMUNICACIÓN: es la capacidad de expresar de manera adecuada emociones y pensamientos con los demás, aunque estemos en desacuerdo con ellos.

COOPERACIÓN: consiste en trabajar juntos para realizar una tarea común, con el fin de alcanzar un mismo objetivo, en el que intervengan intereses comunes, semejantes o complementarios.

AUTOCONTROL: es la capacidad de dominar nuestras emociones y de tomar decisiones correctas, sin afectar nuestras relaciones con los demás.

TOLERANCIA: consiste en aceptar que otras personas pueden tener opiniones diferentes sobre una situación. Esto no significa soportar atropellos sino aceptar las diferencias.

RESPETO: es la demostración de aceptación de ideas y emociones ajenas (Pluralismo).

NEGOCIACIÓN: consiste en buscar puntos comunes que puedan conducir a un acuerdo que permita una solución conciliadora para ambas partes, buscando que ambas ganen, evitando el manejo violento del conflicto. Durante este proceso la comunicación juega un papel fundamental y por tanto no se debe usar mensajes de recriminación o de acusación, hablar de sí mismo y de las propias inquietudes.

D

Como aplicación práctica al tema desarrollado acerca de la utilidad de la derivada, y

AÑO	POBLACIÓN EN MILLONES
1905	4.1
1912	5.0
1918	5.8
1928	7.8
1938	8.7
1951	11.5
1964	17.4
1973	22.9
1985	29.2
1993	33.1
2002	43.8
2015	53.1

guiándome por los ejercicios resueltos (sobre todo el 7 de la sección C) analizo la siguiente tabla que muestra los resultados de los 10 censos de población realizados en Colombia durante el siglo pasado:

(Los dos últimos datos - los de color rojo - son estimativos).

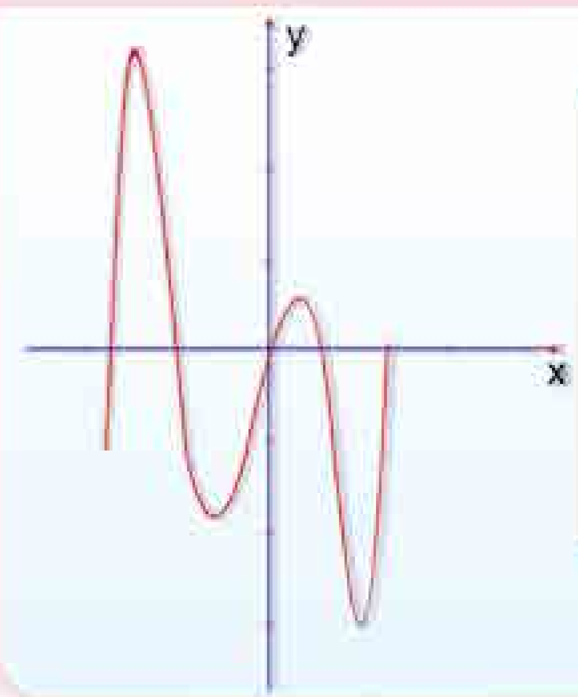
1) Elabore una gráfica lo más aproximadamente posible y determine la velocidad del crecimiento anual de la población en 1993 y use el resultado para determinar la población aproximada en 1995.

2) De acuerdo a nuestra experiencia en el manejo de instrumentos del gobierno estudiantil, precisemos de qué manera éstos pueden ser utilizados en la solución de conflictos. Ofrecemos algunos ejemplos.

ESTUDIO Y ADAPTACIÓN DE LA GUÍA

GUÍA 2

CRECIMIENTO O DECRECIMIENTO DE FUNCIONES



Conocidos los intervalos de crecimiento o de decrecimiento de una función, se puede bosquejar la curva, por complicada que sea la función. En la gráfica, se ve una aproximación de la función:

$$Y=2X^5-10X^3+6X-1$$

INDICADORES DE LOGRO

- Define e interpreta los conceptos creciente o decreciente aplicado a una función bajo los criterios algebraico, geométrico y analítico
- Calcula e interpreta adecuadamente los intervalos donde una función crece o decrece
- Utiliza los intervalos de crecimiento o de decrecimiento de una función para graficar aproximadamente la curva, es decir, bosquejarla
- Analiza las ventajas y desventajas de las alternativas posibles, para elegir la más adecuada **(TOMA DE DECISIONES)**
- Asume responsabilidad por las decisiones tomadas
- Comunica sus decisiones en forma oportuna
- Toma decisiones en el momento conveniente

Con los compañeros leemos y analizamos la siguiente información:

Fuera del tema de los extremos de una función, trataremos la C.L.G. TOMA DE DECISIONES, entendida como un proceso que se extiende a lo largo de toda la vida, pues es prácticamente imposible imaginar un campo de mayor trascendencia para el ser humano que el de la toma de decisiones. Al formular mi proyecto de vida, estoy tomando la decisión más importante de mi vida, pues de ella depende mi futuro. Es por esto que entender y vivir la competencia es fundamental para mi crecimiento personal.

Una de las decisiones más importantes en muestra vida es, por ejemplo, seleccionar una profesión acorde con nuestras aspiraciones. Se trata de explorar y de experimentar en el mundo de nuestro quehacer estudiantil y, en un futuro, del campo laboral. Se trata también de comprender nuestras propias aptitudes, intereses y habilidades, y de combinar todo esto para crear un marco favorable para nuestra vida. Tendremos muchas oportunidades para descubrir y redescubrir actividades que se adapten a nuestro cambiante estilo de vida. Es importante que participemos activamente en este proceso de la toma de decisiones.

La toma de decisiones, ahora y en el futuro, comienza en uno mismo, en la conciencia que se tiene del mundo que nos rodea y en nuestra habilidad para descubrir aquello que es verdaderamente importante para alcanzar nuestras metas.

Estemos, pues, muy atentos a las alusiones que se hagan en esta guía sobre la toma de decisiones.

A

Leo, analizo y comparto con un compañero lo siguiente. Si necesito escribir lo hago en mi cuaderno de matemáticas.

1) Si $Y = \frac{X^3}{3} - 2X^2 + 3X + 1$, determino los valores de "X" para los cuales $\frac{dy}{dx} = 0$ y con el resultado calculo los correspondientes valores de la función "Y".

2) Para la misma función hallo los valores de "X" para los cuales la pendiente de la tangente geométrica es igual a 1 y luego busco los valores correspondientes de la función "Y".

3) Resuelvo las inecuaciones:

a) $X^2 + 2X - 3 > 0$

b) $X^3 - 4X < 0$

Si tengo dificultades para obtener los resultados, consulto la información en las fuentes disponibles.

Ahora examino la siguiente lista y, con toda sinceridad, determino mi propia situación, como un buen punto de partida para introducirme en "la toma de decisiones". Escribo mis conclusiones para usarlas más adelante.

a. Para determinar el conocimiento que tengo de mí mismo, trato de descubrir mis intereses, mis aptitudes, mis habilidades y limitaciones.

b. Observo el desempeño de otras personas en nuestra institución, en mi familia y en mi comunidad y hablo con ellos acerca de sus experiencias en la actividad que desarrollan.

c. Me trazo algunos logros a mediano y largo plazo, acordes con las deducciones hechas.

B

Leo, interpreto y anoto en mi cuaderno de matemáticas los conceptos que aparecen en el recuadro verde y si es preciso, elaboro diagramas.

LOS INTERVALOS DE CRECIMIENTO Ó DE DECRECIMIENTO DE UNA FUNCIÓN

Algebraicamente una función Y = F(x) es CRECIENTE en todos los intervalos de su dominio en donde al aumentar o disminuir el valor de la variable "X", la función "Y" también aumenta o disminuye, y es DECRECIENTE en aquellos intervalos en los cuales al aumentar o disminuir la variable "X", la función "Y" disminuye o aumenta, o sea:

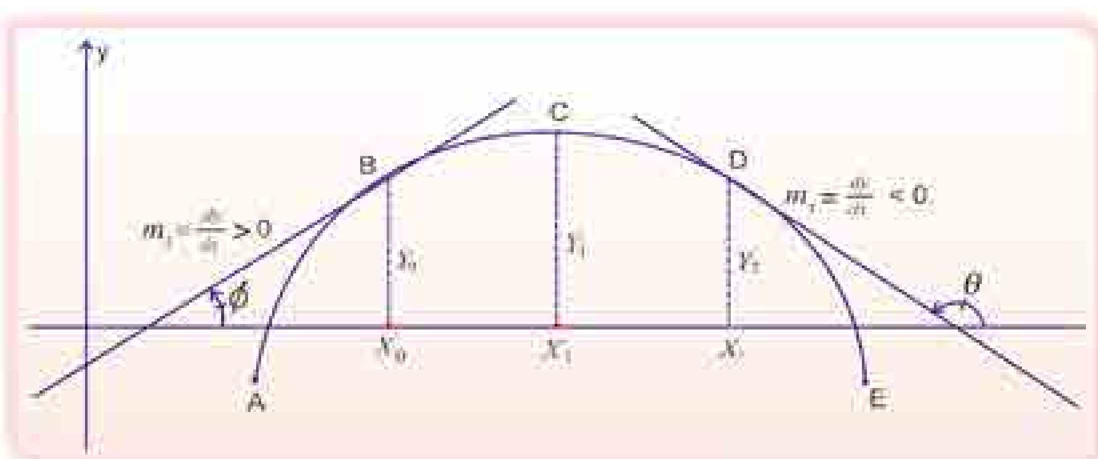
F(x) CRECE $\Leftrightarrow X_0 < X_1 \Rightarrow Y_0 < Y_1$

F(x) DECRECE $\Leftrightarrow X_0 > X_1 \Rightarrow Y_0 > Y_1$

Geométricamente, una función es CRECIENTE en aquellos intervalos de su dominio en los cuales su gráfica es ascendente y DECRECIENTE en los intervalos en donde la gráfica es descendente.

Analíticamente, una función es CRECIENTE en aquellos intervalos de su dominio en los cuales $\frac{dy}{dx} > 0$ y es DECRECIENTE en los intervalos en donde $\frac{dy}{dx} < 0$.

En la gráfica siguiente se visualiza claramente la situación: entre A y C la curva sube y por tanto allí la función es CRECIENTE y entre D y E la curva desciende y por tanto es DECRECIENTE.



Así como es posible graficar una función bajo los conceptos de creciente o decreciente, ocurre lo mismo con nuestra vida y casi pudiéramos graficarla para comprobar si esta es creciente o decreciente, determinada por el tipo de decisiones que tomemos: si la decisión es acertada y oportuna, puede presentarse un crecimiento personal

exitoso, pero, si por el contrario las decisiones se han tomado con precipitación, sin asesoría, sin reflexión, sin análisis, entonces nos exponemos al fracaso y por tanto al decrecimiento personal.

Los criterios matemáticos expuestos justifican el procedimiento para calcular los intervalos de crecimiento o de decrecimiento de una función Y = F(x):

1) Se calcula la derivada de la función respecto de la variable independiente.

2) Se plantea la inecuación para la condición de crecimiento o de decrecimiento, ya que el método que se utilizó para resolver las inecuaciones produce al final el resultado de las dos posibilidades.

3) Se resuelve la inecuación y se da la respuesta de acuerdo con las condiciones impuestas.

Ejemplo 1: calcular los intervalos de crecimiento o de decrecimiento de la función $Y = X^3 - 12X$

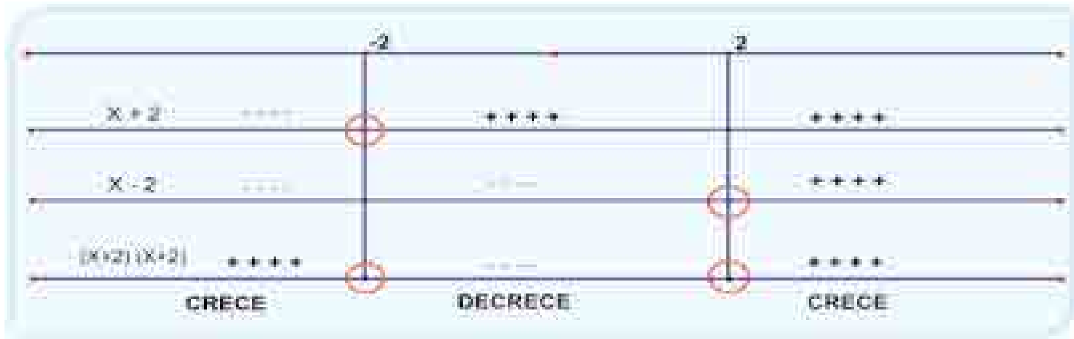
Solución:

(1)	$Y = X^3 - 12X$	(Función dada)
(2)	$\frac{dy}{dx} = 3X^2 - 12$	(Derivando la función)
(3)	$3X^2 - 12 > 0$	(Planteando para crecimiento, por ejemplo)
(4)	$3(X + 2)(X - 2) > 0$	(Factorizando la (3))

Si $X + 2 > 0$ entonces $X > -2$ (X+2 es positivo a la derecha de -2 y negativo a la izquierda).

Si $X - 2 > 0$ entonces $X > 2$ (X-2 es positivo a la derecha de 2 y negativo a su izquierda).

Trasladamos los valores - 2 y + 2 a un eje real para solucionar la inecuación, conforme vimos en una guía anterior.



De acuerdo con el resultado, la función CRECE en $]-\infty,-2[\,\bigcup\,]2,\infty[$, porque en ellos la derivada es mayor que 0 y DECRECE en $]-2,2[$, porque en él la derivada es negativa.

Ejemplo 2: calcular los intervalos de crecimiento o de decrecimiento de la función

$$F\ (x) = 2X^2 - X^4$$

Solución:

(1) $F(x) = 2X^2 - X^4$ (Función dada)

(2) $F'(X) = 4X - 4X^3$ (Derivada de la función)

(3) $F(X)$ *Decrece* $\Leftrightarrow 4X - 4X^3 < 0$ (Planteando para decrecimiento)

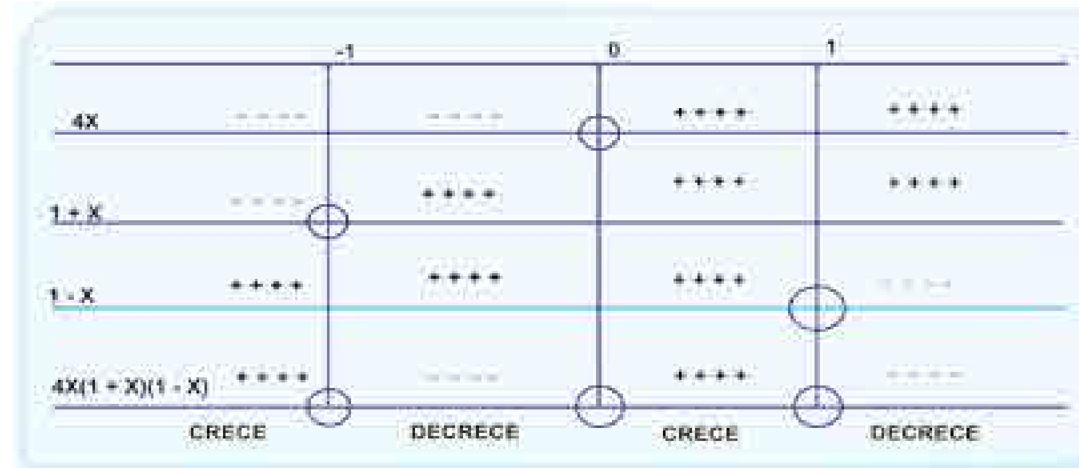
(4) $4X\,(1 - X^2) < 0 \Rightarrow 4X\,(1 + X)(1 - X) < 0$ (Descomponiendo en factores lineales la (4)).

$4X > 0 \Rightarrow X > 0$ (El factor 4X es positivo a la derecha de 0 y negativo a su izquierda).

$1 + X < 0 \Rightarrow X < -1$ (El factor 1 + X es negativo a la izquierda de - 1 y positivo a su derecha).

$1 - X > 0 \Rightarrow -1 + X < 0 \Rightarrow X < 1$ (El factor 1 - X es positivo a la IZQUIERDA de 1 y negativo a su derecha. Nótese que al multiplicar por - 1 el sentido de la inecuación cambia).

Llevando estos resultados a un eje real se obtiene la solución del problema, así:



De acuerdo con el resultado (la paralela correspondiente al producto) se puede afirmar que la función *F* (*x*) es CRECIENTE en $]-\infty,-1[\,\bigcup\,]0,1[$ porque en esos intervalos la derivada es positiva) y DECRECE en $]-1,0[\,\bigcup\,]1,\infty[$ porque en estos intervalos la derivada es negativa).

Ejemplo 3: hallar los intervalos de crecimiento o de decrecimiento de la función $Y = X + \dfrac{4}{X}$

Solución:

(1) $Y = X + \dfrac{4}{X}$ (Función dada)

(2) $Y' = 1 - \dfrac{4}{X^2}$ (Derivando la función)

(3) $1 - \dfrac{4}{X^2} > 0$ (Planteando la inecuación para crecimiento)

(4) $\dfrac{X^2 \quad 4}{X^2} > 0$ (Como para todo X el valor de X^2 es positivo, el sentido de la inecuación no cambia).

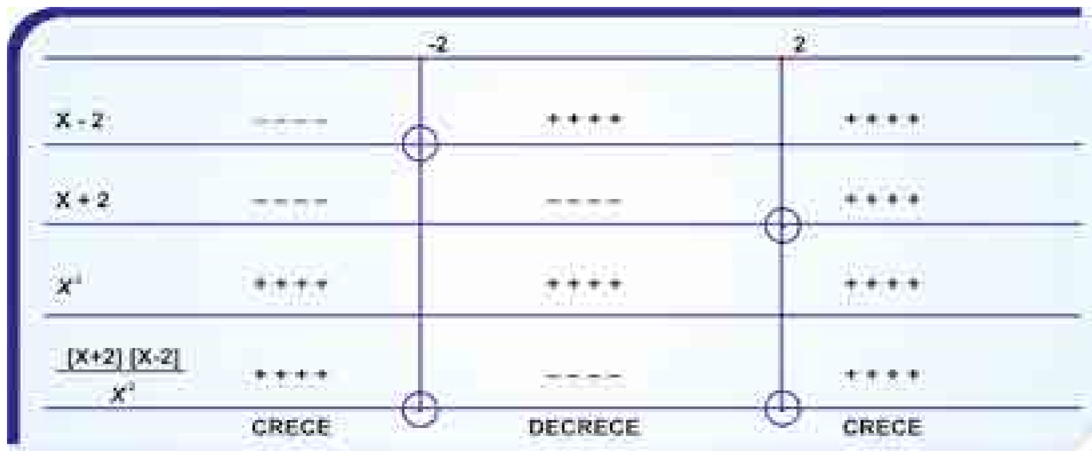
(5) $\dfrac{(X+2)(X-2)}{X^2} > 0$ (Factorizando la (4))

X + 2 > 0 entonces X > - 2 (El factor X + 2 es positivo a la derecha de - 2 y es negativo a su izquierda).

X - 2 < 0 entonces X < 2   (El factor X - 2 es negativo a la izquierda de 2 y positivo su derecha).

X^2 es siempre POSITIVO para cualquier valor de X.

Y si se llevan estos resultados al eje real, se tiene:



Luego la función es CRECIENTE en los intervalos $]-\infty,-2[\cup]2,\infty[$ y DECRECE en $]-2,0[\cup]0,2[$. Cabe resaltar que debido a que en la función aparece $\frac{4}{X}$, la X no puede tomar el valor 0 (no se puede dividir por 0) y la situación se describe diciendo que la función no es continua y que se interrumpe cuando X=0.

Bosquejo de la gráfica de una función

Si se desea hallar la gráfica de una función, se determina su dominio, se le asignan a la variable "X" algunos valores que estén dentro del dominio y se calculan los valores correspondientes de la función "Y". Luego se localizan en el plano cartesiano los puntos respectivos y por último se hace una aproximación de la gráfica interpolando otros valores.

Usando los intervalos de crecimiento o decrecimiento de una función es más sencillo encontrar un bosquejo de la gráfica, utilizando el aspecto geométrico descrito en la definición que se dio al comienzo de la guía. Para hacerlo, basta calcular los valores de la función "Y" para los extremos finitos de los intervalos de crecimiento o de decrecimiento de la función y localizar estos puntos en el plano: si aproximándose al punto por la izquierda la función es creciente, entonces la curva sube; si es decreciente, entonces la curva baja. Por la derecha del punto se hace un razonamiento similar. Con estos elementos podemos entonces hacer un bosquejo (aproximación) de la gráfica.

Por ejemplo, para la función $Y = X^3 - 12X$ planteada en el primer ejercicio, buscamos los valores de "Y" cuando la variable "X" tome los valores -2 ó 2 (extremos finitos de los intervalos de crecimiento o decrecimiento), así:

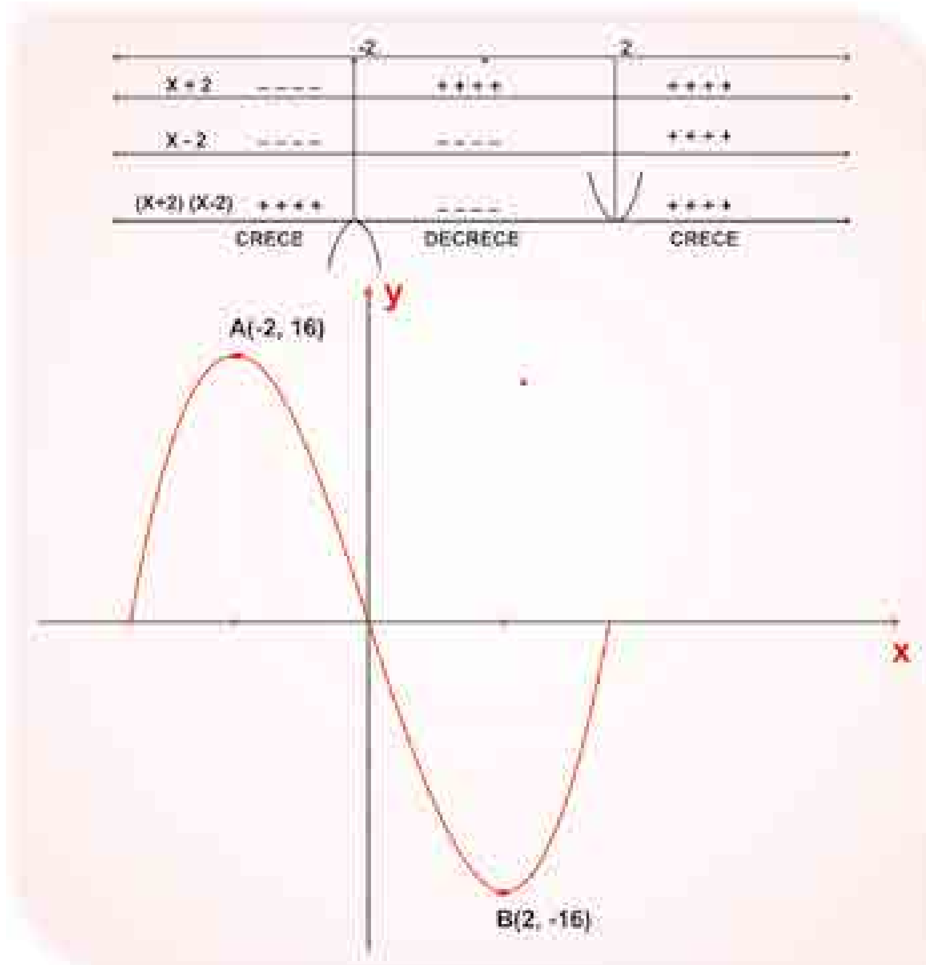
Si $X = -2 \Rightarrow Y = (-2)^3 - 12(-2) = -8 + 24 \Rightarrow Y = 16$.

Si $X = 2 \Rightarrow Y = (2)^3 - 12(2) = 8 - 24 \Rightarrow Y = -16$. Localizamos, pues, los puntos A (-2, 16) y B(2, -16).

A la izquierda de -2 la función es CRECIENTE y por tanto la gráfica SUBE; a la derecha de -2 la función es DECRECIENTE y en consecuencia la gráfica BAJA.

De igual manera, a la izquierda de 2 la función es DECRECIENTE y por tanto la gráfica BAJA; a la derecha de 2 la función es CRECIENTE, luego la gráfica sube.

En la siguiente figura se describe el proceso: la primera parte corresponde a la descripción anterior y la otra es el bosquejo de la curva:



Ejemplo 1: bosquejar la función F(x) = $2X^2 - X^4$ propuesta en el segundo ejemplo de esta guía.

Solución: hallamos los valores de la función "Y" cuando la variable "X" toma los valores -1, 0 y 1, respectivamente, que son los extremos finitos de los intervalos de crecimiento o de decrecimiento de la función:

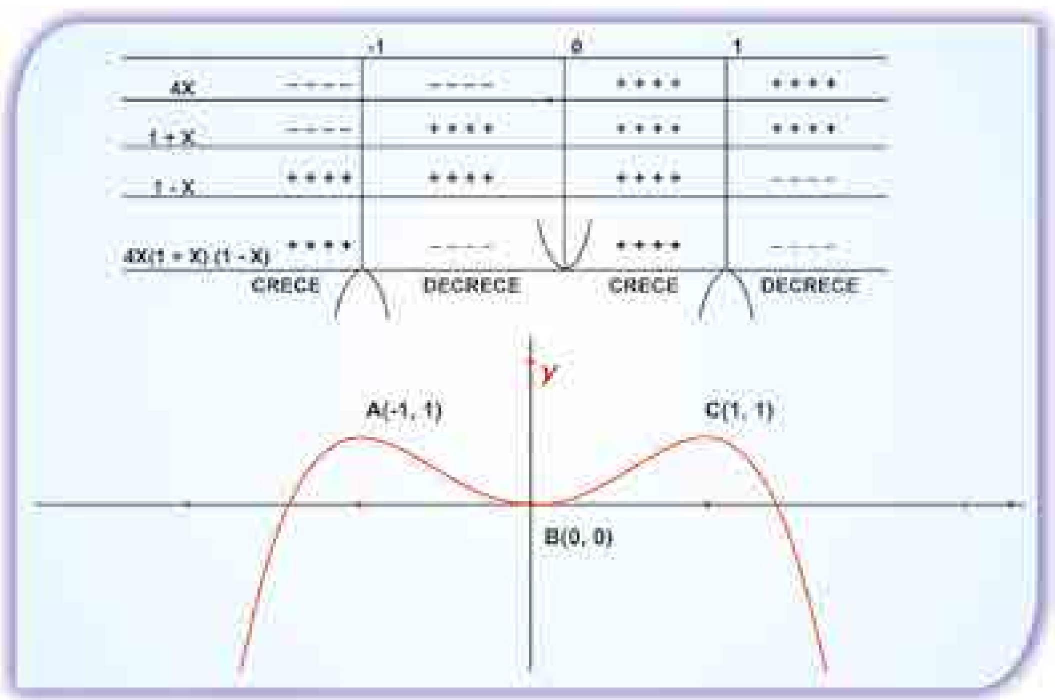
Si $X = -1 \Rightarrow Y = 2(-1)^2 - (-1)^4 \Rightarrow Y = -2 - 1 = -3$. Luego A(-1,-3) es un punto de la curva.

Si $X = 0 \Rightarrow Y = 2(0)^2 - (01)^4 \Rightarrow Y = 0$. Luego B(0, 0) es un punto de la curva.

Si $X = 1 \Rightarrow Y = 2(1)^2 - (1)^4 \Rightarrow Y = 2 - 1 = 1$. Luego C(1, 1) también es un punto de la curva.

A la izquierda de -1, la función es CRECIENTE y por tanto la curva sube; a la derecha de -1 es DECRECIENTE, luego la curva baja. A la izquierda de 0 la función es DECRECIENTE, luego la curva baja; a la derecha de 0 la función es CRECIENTE, luego la curva sube. A la izquierda de 1 la función es CRECIENTE, luego la curva sube; a la derecha de 1 la función es DECRECIENTE, luego la curva baja.

Haciendo un análisis similar al del primer bosquejo llegamos a la siguiente aproximación de la gráfica de la función:



Y ¿Qué hay de la toma de decisiones?

Para tomar decisiones se necesita carácter, firmeza, ser directo y frontal pero también mesura, prudencia y análisis; quienes mejores decisiones toman son muy equilibrados, no se van por ningún extremo y cuentan con información suficiente. Por lo tanto, conviene pensar en:

- No dejarse llevar por las presiones ni por las voces de otros, pues cada decisión afecta positiva o negativamente a terceros (incluso a uno mismo), pero alguien debe tomar la responsabilidad y decidir.
- No es bueno andarse por las ramas e ir preguntando a todo mundo qué se debe hacer; por lo general, quien más conoce un problema es quien decide cuál será la solución para éste.
- Deben estudiarse causas, consecuencias y posibles resultados y mantener siempre abierta la carpeta de soluciones.
- Ante la duda y la incertidumbre es aconsejable acudir a otras personas que puedan poseer mayor información.
- La creatividad es una de las mejores armas para formular soluciones y debe ser explotada.
- Cada problema puede tener una o más soluciones.

Con el fin de interiorizar los temas y afianzar mis conocimientos, guiándome por los conceptos definidos y los ejercicios resueltos, desarrollo las siguientes cuestiones, comparto mis respuestas con las de otros compañeros y con el profesor, con la finalidad de detectar posibles fallas de apreciación y tratar de corregirlas.

Para las siguientes funciones, calculo los intervalos de crecimiento o de decrecimiento de la función y uso el resultado para bosquejar la gráfica:

1) $Y = - X^2$

2) $Y = \frac{X^3}{3} + \frac{X^2}{2} - 6X + 8$

3) $Y = X^4 + 2X^3 - 3X^2 - 4X + 4$

4) $Y = 3X^4 - 10X^3 - 12X^2 + 18X - 7$

5) $Y = X^3 - 6X^2 + 9X + 5$

Acerca de la toma de decisiones reflexiono sobre las siguientes preguntas que me pueden dar luces sobre esta competencia, escribo mis apreciaciones y las guardo en mi carpeta personal:

¿Por qué me puede ser útil saber sobre la toma de decisiones?

La toma de decisiones me permitirá elegir, por ejemplo, una carrera basándome en mis experiencias personales.

¿Y por dónde empiezo?

Una buena manera de empezar es, indudablemente, intentando conocerme a mí mismo. Si mi profesión se adapta a mis expectativas y me brinda satisfacción, seré una persona más feliz. Como lo hice antes (al final de la sección A), analizo la lista de mis intereses, habilidades y debilidades que ya elaboré. Luego trato de encontrar carreras para las que se requieran cualidades como las que poseo.

¿Cómo defino mis intereses? ¿Por qué es importante definirlos?

Mis intereses son aquellas cosas que me agrada realizar. Alguna gente tiene pasatiempos como los carritos de madera o el aeromodelismo. Estos pasatiempos pueden convertirse en profesiones, tales como piloto de automóviles (el caso de Juan Pablo Montoya) o piloto de aviación. Las profesiones que más cosas en común tienen con mis propios intereses suelen ser las más gratificantes.

¿Cómo determino mis aptitudes?

Mis aptitudes son aquellas actividades mentales y físicas que me resultan fáciles. Quizá sea bueno dibujando animales o dándole ánimo a la gente que necesita ayuda. Estas aptitudes pueden contribuir a que haga una carrera como pintor o como consejero.

¿Cómo determino mis habilidades?

La palabra “habilidad” se refiere a aquellas actividades que pueden aprenderse por medio de la enseñanza o el entrenamiento. Por ejemplo, puedo mejorar mis habilidades para la matemática realizando las actividades que me propongan en la escuela o puedo asistir a una conferencia y aprender muchísimo sobre un nuevo programa de computación. Cada desempeño implica una serie de tareas que realizaré a menudo, y cada tarea implica una serie de habilidades. Mis habilidades seguirán desarrollándose durante toda mi vida.

¿A quién le puedo solicitar asesoría?

La familia y los compañeros son siempre un buen punto de partida. La gente que me conoce puede contarme de manera clara e informal acerca de mi desempeño. Los consejeros estudiantiles y otros miembros de la comunidad también estarán dispuestos a charlar conmigo. Planeo las preguntas que me gustaría hacer y preparo una lista antes de comenzar. Por ejemplo:

- ¿Cuáles son las tareas que hay que desempeñar en la profesión que me gusta? Existe una relación clara entre mis propios intereses, aptitudes y habilidades con aquellos que se necesitan para las tareas típicas de esa profesión?
- ¿Qué tipo de educación previa necesito para dicha profesión? ¿Dónde puedo aprender y prepararme? ¿Cómo puedo pagar dicha educación?
- ¿Cuál es el futuro de la profesión aludida?
- ¿En qué horarios se trabaja? ¿Existe algún tipo de flexibilidad? ¿Puedo trabajar desde mi casa?
- ¿Es necesario viajar?
- ¿Cuáles son las posibilidades de crecimiento que tengo en esa profesión?
- ¿Cuáles son los beneficios en cuanto a cobertura de salud y jubilación que ofrece la profesión?
- ¿Cuánto dinero ganaría?
- ¿Necesito mudarme a otra ciudad?

Como aplicación a lo estudiado en esta guía acerca de "la toma de decisiones", me autoaplico un test, lo respondo con toda sinceridad y me cualifico de acuerdo con las condiciones que se presentan más adelante.

1. Cuando se me presenta un problema soy capaz de analizar las causas del mismo serenamente, sin acaloramiento, dejando de lado toda presión existente.

   a) Soy capaz
   b) Sólo algunas veces
   c) No puedo

2. Me doy a la tarea de formular varias soluciones para un mismo problema antes de buscar los efectos de cada solución propuesta.

   a) Sí
   b) En ocasiones
   c) No

3. Necesito escuchar la opinión de terceros antes de tomar una decisión crucial.

   a) No lo necesito
   b) Algunas veces
   c) Sí, necesariamente

4. Busco soluciones diferentes a las tradicionales para atender problemas recurrentes.

   a) Sí, siempre lo intento
   b) Muy poco
   c) No, me fijo en las soluciones anteriores

5. Considero que el trabajo en equipo es importante, pero soy consciente que ante la falta de consenso existe la necesidad de que alguien del equipo sea quien tome las decisiones.

   a) Totalmente consciente

   b) Prefiero una votación
   c) No me interesa

6. Si me piden que decida sobre un asunto particular en el que no tengo mayores conocimientos ni elementos de juicio, entonces:

   a) Pido tiempo y mayor información para conocer más
   b) No decido de ninguna manera
   c) Decido

7. Ante la duda en la toma de una decisión pido consejo de otras personas o simplemente me lanzo al agua

   a) Escucho opiniones, las sopeso y luego decido
   b) En ocasiones
   c) Me lanzo

8. Me gusta que otras personas aporten ideas y soluciones porque

   a) En sus ideas puede estar la solución más acertada
   b) No me gusta, prefiero actuar en solitario
   c) Me libran de la responsabilidad

9. Si tengo que tomar una decisión y sé que ésta afectará negativamente a una persona que estimo:

   a) Decido
   b) Le consulto
   c) Prefiero que otro la tome

10. Creo que las ideas creativas y poco comunes pueden resultar en buenas soluciones

   a) Siempre
   b) A veces
   c) Nunca

Para la cualificación, se siguen las siguientes normas:

En cada ítem, si la respuesta es a, asigne 5 puntos; si es b, asigne 3 puntos y si es c, asigne 1 punto. Después de responder los 10 ítems, sume los resultados y cualifique así:

24 puntos o menos: baja. La responsabilidad de la toma de decisiones lo agobia o simplemente no le interesa y prefiere que otros lo hagan por usted. La indecisión es muy frecuente en su vida.

Entre 25 y 39 puntos: media. Sabe que es importante tomar decisiones pero aún no lo reconoce plenamente, osa enfrentar la responsabilidad aunque no tiene claro el mejor método.

Entre 40 y 50 puntos: alta. Busca soluciones creativas, sabe que no es dueño absoluto de toda la verdad y que dar participación a los demás hace parte del éxito, pero no depende de ellos. Le gusta el riego pero, lo sabe medir.

1. Ahora, planeo la aplicación del test (o uno similar) a otros miembros de mi entorno que deban tomar decisiones que de alguna manera tienen que ver conmigo, registro los resultados y los confronto. Escribo mis conclusiones, las comparo con las de otros compañeros y las discutimos para lograr un consenso.

2. Finalmente, basado en los conceptos de crecimiento o decrecimiento de una función, leo el siguiente enunciado y resuelvo los planteamientos:

"El dueño de un limonar calcula que si se siembran 50 árboles por hectárea, cada árbol en producción dará un promedio de 600 limones por año. Por cada árbol adicional que se siembre por hectárea, el número de limones producido por un árbol al año disminuirá en 6:

a) Decido cuál es la función que describe la situación.

b) Calculo los intervalos de crecimiento o de decrecimiento de la función.

c) Bosquejo la curva.

d) En el punto en donde la curva forma una concavidad, calculo cuántos limones se producen.

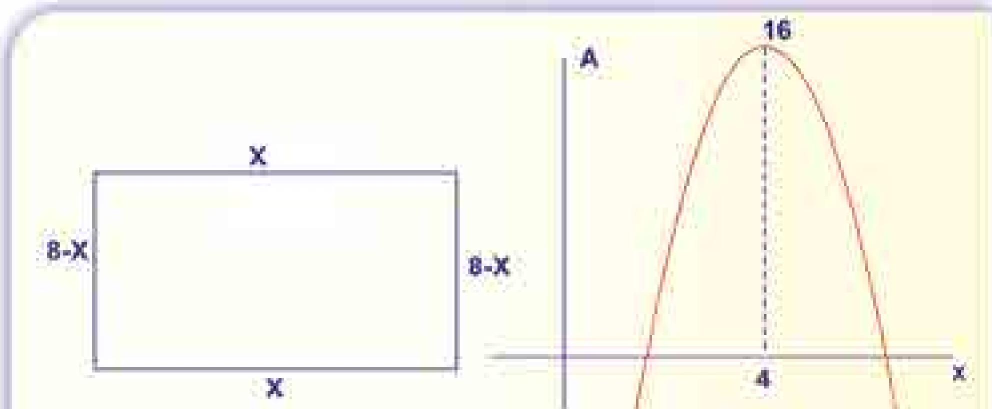
e) En otros puntos de la misma curva el número de limones es ¿mayor o menor que el valor anterior?

3. Comparo mis respuestas con las de otro compañero, discutimos hasta ponernos de acuerdo y compartimos con el profesor para detectar posibles fallos.

ESTUDIO Y ADAPTACIÓN DE LA GUÍA

GUÍA 3

VALORES EXTREMOS DE UNA FUNCIÓN: MÁXIMOS Ó MÍNIMOS



Si el perímetro (suma de sus lados) del rectángulo es 16, su base medirá X y su altura 8-X. Igualmente, su área A (que se muestra a la derecha) es el producto de la base por la altura, o sea: A=X*(8-X), cuyo valor más grande (16) ocurre cuando X sea igual a 4. Para otros valores de la base X, 6 por ejemplo, el área a es igual 12, que es menor que 16, aunque el perímetro sigue siendo 16. En el plano cartesiano se muestra el comportamiento de la base (x) contra el área (A).

INDICADORES DE LOGRO

- Dada la gráfica de una función, identifica claramente los valores extremos de la función
- Calcula correctamente los valores extremos de una función mediante el criterio de las aproximaciones en la primera derivada y usa el resultado para bosquejar la curva
- Determina con suficiencia los valores extremos de una función a través de la segunda derivada e igualmente, bosqueja la curva
- Identifica las diversas personas que se benefician o afectan de sus acciones y procesos **(ORIENTACIÓN AL SERVICIO)**
- Percibe algunas actitudes y necesidades de los otros
- Respeta el punto de vista de las personas a las que presta su servicio
- Contribuye a que los otros tomen decisiones, respetando su autonomía, sin forzarlos o presionarlos
- Maneja con amabilidad y cortesía las críticas de otros
- Proyecta a los demás sus conocimientos acerca de la empresa y los productos o servicios que ofrece
- Demuestra la vivencia de la solidaridad como valor humano

Con los compañeros leemos y analizamos el siguiente contenido:

Además de los valores extremos de una función que vamos a desarrollar en esta guía, trataremos la C.L.G. ORIENTACIÓN AL SERVICIO, que se define como "capacidad para reconocer cómo sus acciones y procesos inciden y aportan a la satisfacción de los otros".

Es la cualidad de ayudar a otros de manera pertinente, desarrollando la disposición y actitud para asegurar la satisfacción de las necesidades del cliente de manera atenta, oportuna y permanente.

La orientación al servicio permite ser consecuentes o razonables entre lo que se espera del servicio y lo que la empresa realmente provee a sus clientes.

La orientación al servicio no termina cuando se entrega el producto y por tanto se debe hacer un seguimiento a los resultados y objetivos propuestos, con el fin de alcanzar el mayor grado de satisfacción posible: la calidad no es un premio a un producto o servicio, es un reconocimiento a la gestión realizada.

Para la orientación al servicio es importante la gestión de la información, pues el conocimiento de qué es lo que se pretende lograr, mejora la calidad. Una adecuada interacción genera un mejoramiento continuo.

Evaluar conjuntamente los procesos establecidos, tomar acciones correctivas y realizar un seguimiento de lo que se quiere lograr mejora la calidad del servicio. El respeto a los puntos de vista y a las sugerencias hechas y su posterior evaluación conlleva a una gestión del cambio que busca generar una mejor calidad, en cualquier ámbito en el que nos desenvolvamos.

La crítica y el aporte de ideas propician un mejor ambiente de servicio que redunda en el beneficio general y que permite la participación de las instancias involucradas.

Atendamos, pues, las sugerencias que se hagan respecto de esta competencia.

A

Leo, analizo y comparto con un compañero el siguiente contenido. (Si necesito escribir lo hago en mi cuaderno de matemáticas).

Sea la función $Y = X^3 - 6X^2 + 9X$. Calculo los intervalos de crecimiento o de decrecimiento de la función y uso el resultado para bosquejar la curva. ¿Cuántas concavidades tiene la curva?

¿Qué nombre podríamos darle a los puntos donde la curva cambia de creciente a decreciente? ¿Y de decreciente a creciente?

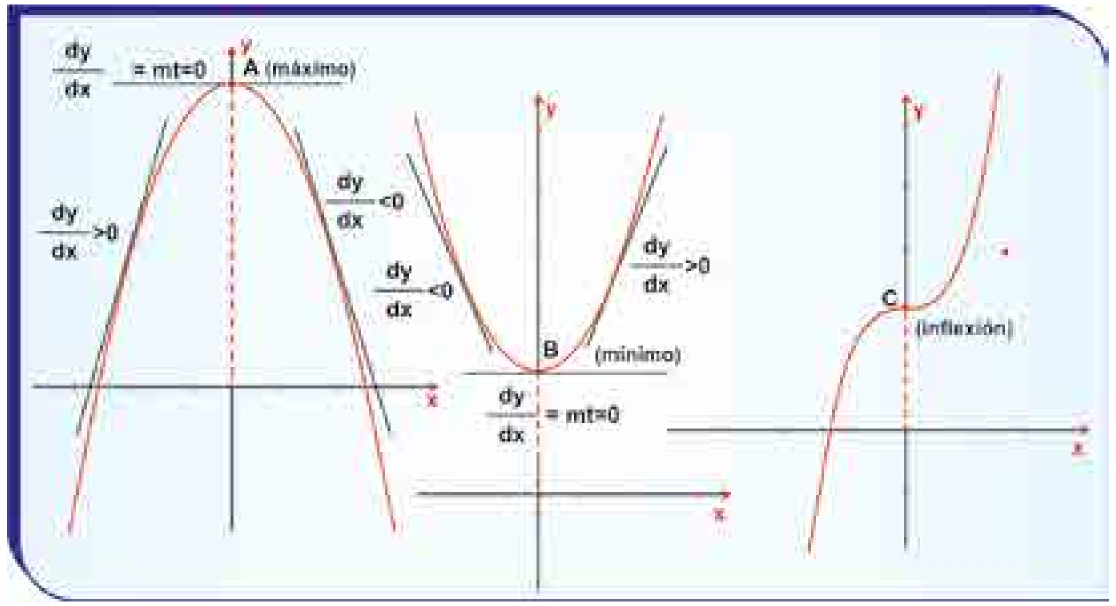
¿Qué tipo de servicio podría yo prestarle a mi compañero si presenta dificultades en la solución del ejercicio que plantea la vivencia?

Si tiene dificultades, revise la guía anterior o busque información a través de los recursos que tiene su institución, por ejemplo CABRI II. Resuelto el ejercicio, socializamos nuestro trabajo con otros subgrupos y con el profesor.

B

Con un compañero leemos, analizamos y consignamos en el cuaderno de matemáticas lo que aparece en el recuadro verde. Si es necesario volvemos a resolver comprensivamente los ejemplos dados:

En la guía anterior se vio que una función puede ser creciente o decreciente. Los puntos en donde la curva cambia de creciente a decreciente o de decreciente a creciente son los puntos extremos de la función y significa que en ellos la función toma o su valor MÁXIMO o su valor MÍNIMO, como se ve en la gráfica:



ANALICEMOS LA GRÁFICA

En el punto A, la curva pasa de CRECIENTE a DECRECIENTE y la ordenada de A es la más grande dentro de la concavidad hacia abajo y se dice entonces que el extremo A es un MÁXIMO RELATIVO. En el punto B, la curva cambia de DECRECIENTE a CRECIENTE y como la ordenada de B es la más pequeña dentro de la concavidad hacia arriba, se dice que el extremo B es un MÍNIMO RELATIVO. En el punto C no se forma concavidad y sólo se presenta un cambio en la dirección de la curva y se dice que en el extremo C se presenta un punto de INFLEXIÓN; se observa que antes de C la función CRECE y después de C, también.

PRIMER MÉTODO PARA EL CÁLCULO DE LOS EXTREMOS DE UNA FUNCIÓN

De acuerdo con lo expuesto antes, se darán los siguientes pasos para determinar los máximos o mínimos de una función:

1) Se busca la primera derivada de la función y se iguala a 0 (porque en un punto extremo la tangente geométrica es horizontal y por tanto su pendiente es igual a cero).

2) Se resuelve la ecuación resultante. Los valores que se obtienen para la variable se llaman VALORES CRÍTICOS, porque para dichos valores en la variable la función se hace extrema.

3) Se aproxima cada valor crítico, primero por la izquierda (un valor un poco menor que el valor crítico y luego por la derecha (un valor un poco mayor que el valor crítico) y se sustituyen en la derivada para conocer su signo.

4) Se analizan los signos que toma la derivada en las aproximaciones:

   a) Si el cambio es de + a - significa que la curva cambia de creciente a decreciente y por tanto hay un MÁXIMO relativo para dicho valor crítico.

   b) Si el cambio es de - a +, significa que la curva cambia de decreciente a creciente y en consecuencia la función presenta un MÍNIMO relativo para dicho valor crítico.

   c) Si no ocurre ningún cambio: + a + ó - a -, quiere decir que la curva no presenta concavidad ni hacia abajo ni hacia arriba y sólo ocurre un cambio en la dirección de la curva. En estos casos existe un punto de inflexión.

Ejemplo 1: calcular los máximos o mínimos o inflexiones de la función

$Y = \frac{X^3}{3} + \frac{X^2}{2} - 6X + 8$. Use los resultados para bosquejar la curva.

Solución:

1) $Y = \frac{X^3}{3} + \frac{X^2}{2} - 6X + 8$ (Función dada)

2) $Y' = X^2 + X - 6$ (Derivada de la función)

3) $X^2 + X - 6 = 0$ (Igualamos a 0, porque en un punto extremo Y'=m=0)

4) $(X + 3)(X - 2) = 0$ (Factorizando la 3)

5) Si X + 3 = 0 entonces X = -3 y si X - 2 = 0 entonces X = 2 (Se iguala cada factor a 0 y se resuelve la ecuación para obtener los valores críticos).

Tomamos aproximaciones a -3, primero por la izquierda y luego por la derecha y lo reemplazamos en la derivada para determinar el signo que toma en cada caso, así:

Si X = - 3.1 (que es menor que -3) entonces (-3.1+3)(-3.1-2) = (-0.1)(-5.1)= +0.51
Si X = - 2.9 (que es mayor que -3) entonces (-2.9+3)(-2.9-2) = (0.1)(-4.9)= - 0.49

Como el cambio es de + a -, entonces para el valor crítico X = -3 la función presenta un máximo cuyo valor es 21.5, valor que se obtiene reemplazando el valor crítico en la función dada.

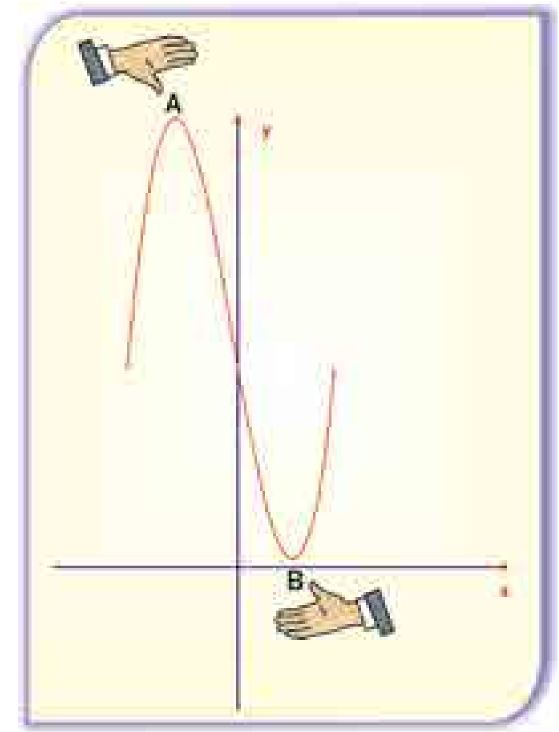
Ahora tomamos aproximaciones a 2, primero por la izquierda y luego por la derecha y sustituimos en la derivada para determinar su signo cuando se aproxima al valor crítico, así:

Si X = 1.9 (que es menor que 2) entonces (1.9 + 3)(1.9 - 2) = - (nótese que sólo interesa el signo).

Si X = 2.1 (que es mayor que 2) entonces (2.1+3)(2.1-2) = +.

Como el cambio es de - a +, entonces para el valor crítico X =2 la función presenta un mínimo relativo cuyo valor es $\frac{2}{3}$, valor que resulta de reemplazar el valor crítico en la función dada.

Para bosquejar la curva, se localizan los puntos extremos que son A $\left(-3\ \frac{43}{2}\right)$ y B $\left(2,\frac{2}{3}\right)$. Como en A hay un MÁXIMO relativo, se coloca la mano formando concavidad hacia abajo como se ve en la figura y se traza aproximadamente la curva, tratando de formar dicha concavidad; igualmente, en B, que es un MÍNIMO relativo, se coloca la mano con la concavidad hacia arriba y se dibuja aproximadamente la curva, tratando de formar esa concavidad. Finalmente, se suaviza un poco el trazado para darle la forma adecuada.



Ejemplo 2: calcular los máximos o mínimos o inflexiones de la función $Y = (2 - X)^3$.

Solución:

1) $Y = (2 - X)^3$ (Función dada)

2) $Y' = -3(2 - X)^2$ (Derivada de la función)

3) $-3(2 - X)^2 = 0$ (Porque en un valor extremo Y'=mt=0)

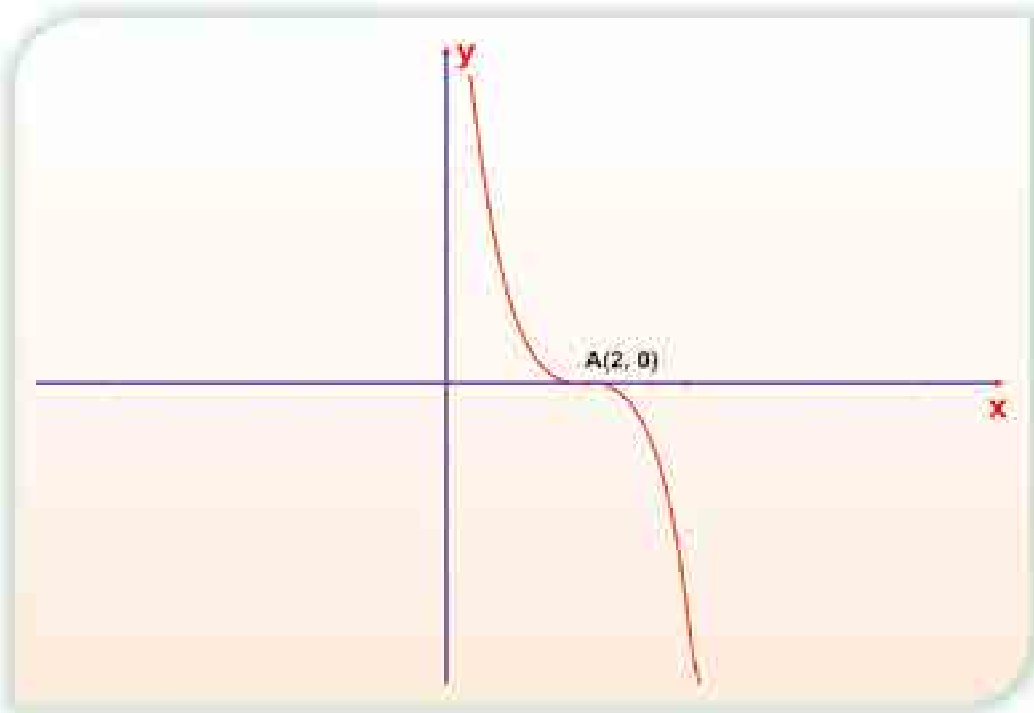
4) X = 2 (Resolviendo la ecuación anterior para obtener un valor crítico)

Ahora tomamos aproximaciones a 2, primero por la izquierda y luego por la derecha y sustituimos en la derivada para determinar su signo cuando se aproxima al valor crítico, así:

Si X = 1.9 (menor que 2) entonces $Y' = -3(2-1.9)^2 = -$ (Sólo interesa el signo)
Si X = 2.1 (que es mayor que 2) entonces $Y' = -3(2 - 2.1)^2 = -$.

Como la derivada no experimenta cambio (- a -), entonces para el valor crítico X =2 la función presenta un punto de INFLEXIÓN en A(2, 0).

Para bosquejar la curva se localiza el punto A(2, 0). Como a la izquierda de 2 la función decrece, se hace descender la curva; a la derecha de 2 la función sigue decreciendo, entonces sigue haciendo bajar la curva, pero con un cambio de dirección, como se ve en la figura:



SEGUNDO MÉTODO PARA EL CÁLCULO DE LOS VALORES DE UNA FUNCIÓN

Si se tiene la derivada de una función, se llama segunda derivada de la función a la derivada de esa derivada, o sea, la segunda derivada de una función es la derivada de la derivada, la tercera es la derivada de la segunda derivada, y así sucesivamente. Por ejemplo: si $F(x) = X^4 - 2X^3 + 5X^2 + 3$ entonces la segunda derivada de F(x) respecto de x es:

$F'(x) = \frac{dy}{dx} = Y' = 4X^3 - 6X^2 + 10X$ (Primera derivada de Y respecto de X)

$F''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = Y'' = 12X^2 - 12X + 10$ (Segunda derivada de Y con respecto a X)

$F'''(x) = \frac{d^3y}{dx^3} = Y''' = 24X - 12X$ (Tercera derivada de Y con respecto de X)

Existe un método alternativo para calcular los valores extremos de una función, aplicando el criterio de la segunda derivada de la función respecto de la variable. El proceso es como sigue:

1) Se busca la primera derivada de la función, se iguala a cero y se resuelve la ecuación para hallar los valores críticos (Igual que en el método anterior).

2) Se calcula la segunda derivada de la función respecto de la variable y se sustituye en ella cada valor crítico para determinar su signo:

   a) Si la segunda derivada resulta POSITIVA, entonces hay un MINIMO RELATIVO para ese valor crítico.

   b) Si la segunda derivada resulta NEGATIVA, entonces existe un MÁXIMO RELATIVO para ese valor crítico.

   c) Si la segunda derivada resulta igual a cero y la tercera derivada es diferente de cero, entonces hay un punto de INFLEXIÓN.

Ejemplo 1: usando el criterio de la segunda derivada, hallar los valores extremos de la función $Y = \frac{X^3}{3} + 3X^2 + 8X - 5$.

Solución:

1) $Y = \frac{X^3}{3} + 3X^2 + 8X - 5$ (Función dada)

2) $Y' = X^2 + 6X + 8$ (Primera derivada de la función)

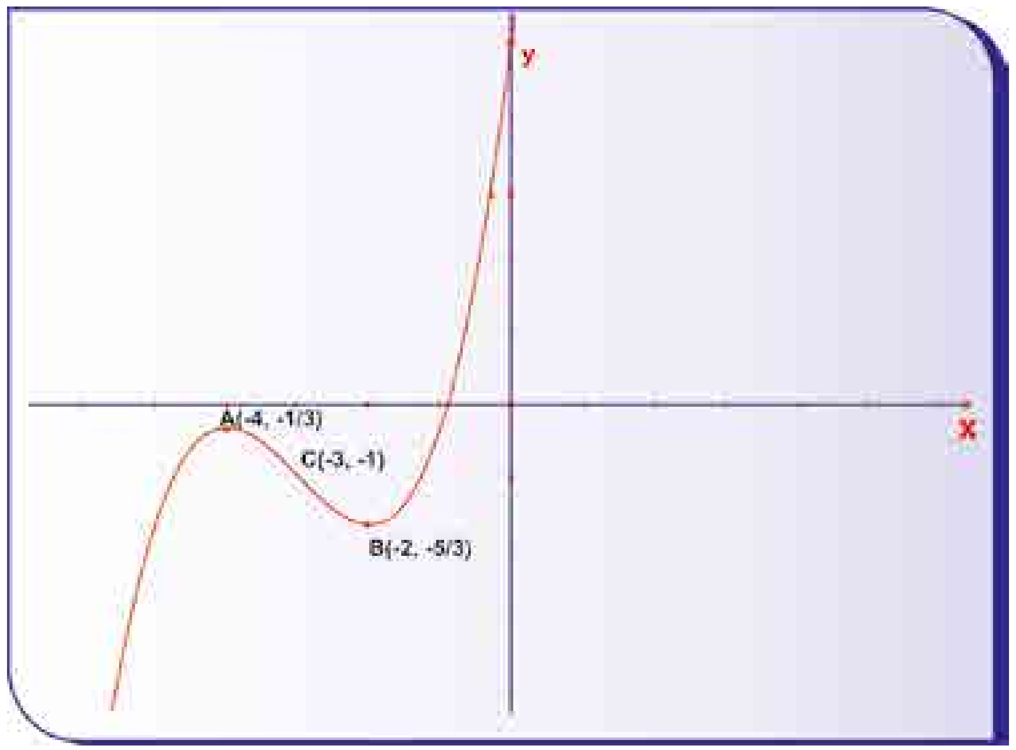
3) $X^2 + 6X + 8 = 0 \Rightarrow (X + 4)(X + 2) = 0 \Rightarrow X = -4 \vee X = -2$ (Se iguala la primera derivada a 0 y se resuelve la ecuación para hallar los valores críticos).

4) $Y'' = 2X + 6$ (Se halla la segunda derivada de la función)

Si X = -4, entonces Y'' = 2(-4) + 6 = - 2, que es menor que 0; luego hay un MÁXIMO relativo en A(-4, $-\frac{1}{3}$) (Se reemplaza el valor crítico -4 en la segunda derivada para determinar su signo).

Si X = - 2 entonces Y'' = 2(-2) + 6 = +2, que es mayor que 0; luego hay un MÍNIMO relativo en B(-2, $-\frac{5}{3}$) (Se reemplaza el valor crítico -2 en la segunda derivada para determinar su signo).

Si existe un punto de inflexión (donde la curva cambia de dirección sin formar concavidad), la segunda derivada debe ser igual a cero y la tercera derivada ha de ser diferente de cero. Por tanto, se halla la segunda derivada, se iguala a cero y se resuelve, así: $2X + 6 = 0$ entonces $X = -3$; se busca la tercera derivada, así: $Y''' = 2$, que es diferente de 0 y por tanto hay un punto de INFLEXIÓN en C(-3, -1).
Si bosquejamos la curva, resulta:



Obsérvese que aproximándose a C, por la izquierda, la curva desciende, cambia de dirección y sigue descendiendo para poder formar la concavidad hacia arriba en el punto B, que es un MÍNIMO relativo como ya se dijo.

Se hace notar que por el método de las aproximaciones en la primera derivada los puntos de inflexión no siempre aparecen; en cambio, usando el método de la segunda derivada se pueden encontrar, siempre y cuando se satisfagan las dos condiciones: la segunda derivada debe ser igual a 0, pero la tercera derivada debe de ser diferente de 0.

Leo, analizo y resuelvo en el cuaderno de matemáticas los siguientes temas para comprobar mi avance en lo relacionado con los valores extremos de una función.

Finalizado el ejercicio y comprobados los aciertos y falencias, me dispongo a observar algunas actitudes manifestadas por algunos compañeros y si estoy en condiciones, ofrezco mis conocimientos, en pro del avance de los que así lo requieran.

Utilizando cualquiera de los dos métodos descritos antes, calculo los valores críticos, los intervalos en donde la función crece o decrece, los puntos de inflexión, los valores extremos y aprovecho los resultados para bosquejar la curva:

1) $Y = X^3 - 3X^2 - 9X + 10$

2) $Y = -X^2 + 8X - 6$

3) $Y = X^3 - 6X^2 + 12X - 7$

4) $Y = X^3 - 27 + 16$

5) $Y = X^3 - 9X^2 + 15X - 5$

6) $Y = (X^2 - 4)^2$

7) $Y = 2X^2 - X^4$

8) $Y = X^4 - 4X$

9) $Y = 2X^3 + 3X^2 - 12X - 4$

10) $Y = \dfrac{X^2 + X + 4}{X + 1}$

D

Usando la aplicación CABRI II, verifico los resultados obtenidos en los ejercicios anteriores dando las instrucciones para construir las gráficas. Si es posible, las imprimo para hacer un análisis más detallado de los resultados.

En relación con mis desempeños en cuanto a la competencia, procedo como lo hice en la actividad C.

ESTUDIO Y ADAPTACIÓN DE LA GUÍA

GUÍA 4

LA DERIVADA EN LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS SOBRE MÁXIMOS Y MÍNIMOS

Hexágonos en un mundo empaquetado

Los hexágonos están en todas partes. Tanto en células vivas, dispositivos artificiales o colonias de abejas, podemos encontrar un tipo característico de orden hexagonal y es lo que se conoce como empaquetamiento compacto y es de hecho el más efectivo para acomodar el mayor número de objetos (un máximo) en el menor espacio (un mínimo).
¡Parece que la naturaleza supiera cálculo!

INDICADORES DE LOGRO

- Plantea y desarrolla correctamente problemas que involucran máximos o mínimos de funciones reales
- Diseña y construye instalaciones agropecuarias, aplicando correctamente los máximos o mínimos de funciones
- Manifiesta curiosidad intelectual **(CREATIVIDAD)**
- Combina, elige y extrapola la información que posee para resolver problemas de su vida cotidiana
- Demuestra empatía (participación activa, y por lo general emotiva, de una persona en una realidad ajena) hacia las ideas diferentes a las suyas
- Posee capacidad de análisis y síntesis

En esta guía, además de los problemas sobre máximos y mínimos, trataremos la C.L.G CREATIVIDAD, que es "el proceso de presentar un problema a la mente con claridad (ya sea imaginándolo, suponiéndolo, meditándolo, visualizándolo, comparándolo, etc.) y luego brindar o inventar una idea, concepto, noción o esquema según líneas nuevas o no convencionales. Supone el estudio y la reflexión antes de la acción".

"Es la capacidad de ver nuevas posibilidades y hacer algo al respecto, ir más allá del análisis de un problema o intentar poner en práctica una solución, produciendo un cambio. El ser creativo conlleva a ser productivo".

"Creatividad es la capacidad de ver nuevas posibilidades y hacer algo al respecto. Cuando una persona va más allá del análisis de un problema e intenta poner en práctica una solución se produce un cambio. Esto se llama creatividad: ver un problema, tener una idea, hacer algo sobre ella, tener resultados positivos. Los miembros de una organización tienen que fomentar un proceso que incluya oportunidades para el uso de la imaginación: experimentación y acción".

Como uno de los propósitos en el grado 11 es formular nuestro proyecto de vida, haremos en esta guía unas consideraciones sobre ¿cuál será mi trabajo en el futuro?

Estemos, pues, atentos a las sugerencias que se hagan sobre esta competencia.

A

Leo, analizo y comparto con un compañero la siguiente información. Si necesito escribir lo hago en mi cuaderno de matemáticas.

Para calcular el área de un triángulo se usa: AreaTriángulo = $\frac{Base \times Altura}{2} = \frac{bh}{2}$. De manera similar, escribo las fórmulas para hallar el área de: el rectángulo, el cuadrado, el triángulo equilátero en función del lado, el círculo, el trapecio, el rombo, la esfera, el área lateral y total del cilindro, el área lateral y total del cono.

¿Qué otras formas puedo utilizar para calcular el área de las figuras indicadas? Comparto mi respuesta con las de otros compañeros y adoptamos las más eficientes. Para hallar el perímetro de un triángulo, basta expresar la suma de sus lados, así:

Perímetro = a + b + c. Similarmente, escribo el perímetro de: el rectángulo, el cuadrado, el círculo (la circunferencia).

Para calcular el volumen del paralelepípedo (una caja) se utiliza la fórmula:
V = largo x ancho x altura =lah. De forma similar, escribo las fórmulas para calcular el volumen de: el cubo, el cilindro, el cono, la esfera.

La vivencia nos permite actualizar conocimientos importantes para la vida laboral, ya que generalmente se requieren a todo momento. La persona que pueda realizar acertadamente este tipo de cálculos, desempeña con mayor seguridad un trabajo o toma decisiones sobre su propia empresa.

Si tengo dificultades para obtener los resultados, consulto la información en las fuentes adecuadas.

B

Analizo y reflexiono sobre lo siguiente:

La sinéctica es una disciplina que desarrolla métodos o estrategias cuyo propósito es desarrollar la creatividad y la productividad.

- La creatividad está latente en casi todas las personas en grado mayor que el que generalmente se cree.
- Cuando se trata de creatividad e inventiva, lo emocional y no racional es tan importante como lo intelectual y lo racional.
- Muchas de las mejores ideas nacen cuando no se está pensando conscientemente en el problema que se tiene entre manos. La inspiración surge durante un período de "incubación", como cuando un hombre está manejando camino al trabajo o regando su jardín o jugando.

El desarrollo de la creatividad es determinante en la decisión que deben tomar las personas para enrutar su vocación en su proyecto de vida lo que les permitirá ser exitosos en lo laboral.

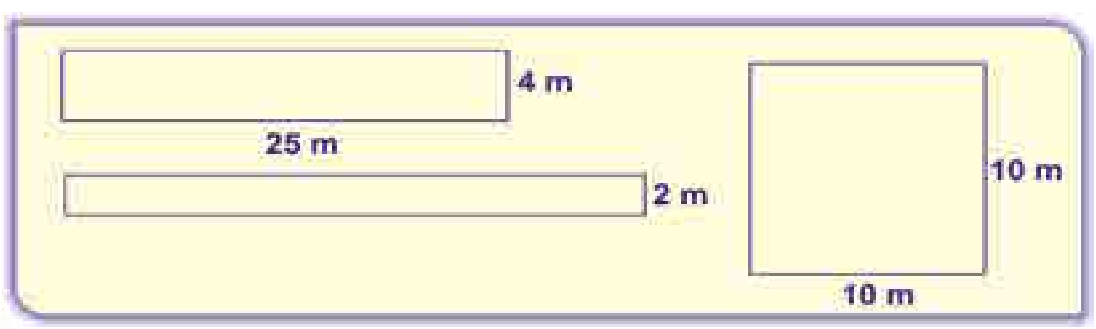
CUALIDADES DE LA PERSONA CREATIVA

Aunque no existe un modelo bien definido de las personas creadoras, todas presentan ciertas similitudes como:

- Manifiestan una gran curiosidad intelectual.
- Tienen en sus mentes amplia información que pueden combinar, elegir y extrapolar para resolver problemas.
- Demuestran empatía hacia la gente y hacia las ideas divergentes.
- No están pendientes de lo que los otros piensan sobre ellos y se hallan bastante liberados de restricciones e inhibiciones convencionales.
- Poseen capacidad de análisis y síntesis.
- Poseen capacidad de redefinición, es decir para reacomodar ideas, conceptos, gente y cosas, para trasponer las funciones de los objetos y utilizarlas de maneras nuevas.

Leo, interpreto y anoto en mi cuaderno de matemáticas los conceptos que aparecen en el recuadro verde y si es preciso, elaboro diagramas e intento resolver por mis propios medios los ejercicios propuestos.

Sean los rectángulos que se muestran en la figura y que representan tres lotes de terreno que se desea cercar con alambrina. ¿En cuál de los rectángulos se gasta menos alambrina? Si se busca el perímetro en cada caso se ve que para uno es de 58 metros; para otro es 104 metros y para el otro es de 40 metros. Es evidente que el más económico es el de 40 metros (el cuadrado de lado 10m).



El hecho de maximizar o minimizar una magnitud es una de las aplicaciones más importantes que tiene el cálculo diferencial y cuya utilidad en cuestiones de economía es innegable, toda vez que un arquitecto, por ejemplo puede diseñar el edificio más económico y con máxima capacidad, una constructora de envases puede diseñar un recipiente de mínimo costo y máximo volumen, etc., como lo comprobaremos a través de ejemplos. Como no existe una regla general aplicable a todos los casos, los siguientes pasos permitirán resolver con éxito algunos problemas sencillos:

1) Si es posible, se construye un gráfico aproximado acorde con las condiciones del problema.

2) Se identifica la magnitud que se desea extremar y se expresa a través de la variable o variables que intervienen en el problema.

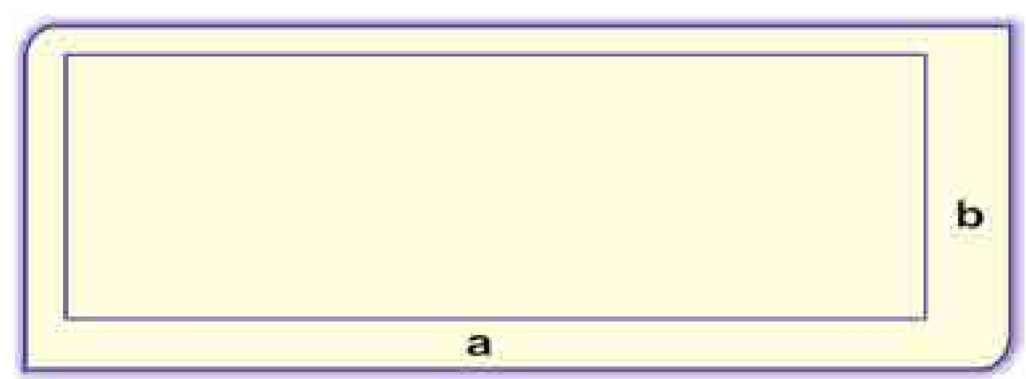
3) Si en la relación anterior hay más de una variable, el enunciado siempre aporta los datos suficientes para plantear una nueva relación que permita ligar las variables que intervienen.

4) Se sustituye una de las variables en la relación planteada en el punto 2, logrando de este modo expresar la función que se va a extremar a través de una sola variable.

5) Se calculan los máximos o los mínimos a la función transformada.

Ejemplo 1: el perímetro de un rectángulo es de 40 metros. Calcular sus dimensiones para que el área sea máxima (es el problema que ya se resolvió por ensayo y error, al iniciar esta sección).

Paso 1: la gráfica.



Paso 2: se desea extremar (hacer máxima en este caso) el área A del rectángulo. Luego: A = ab. La función A queda expresada a través del largo **a** y del ancho **b** del rectángulo.

Paso 3: como en la ecuación anterior hay más de una variable, es preciso buscar la relación que existe entre las dos variables usando los datos del problema. Esa relación es el perímetro P. Luego: P = 2a + 2b = 40, entonces a + b = 20; si despejamos una de las variables (a, por ejemplo), así: a = 20 - b.

Paso 4: se reemplaza el valor de a en la ecuación obtenida en el paso 2, así:
$A = (20 - b)*b$, entonces $A = 20b - b^2$ que es el área del rectángulo expresada a través de la variable **b.**

Paso 5: se calculan los extremos de la función anterior. Luego:

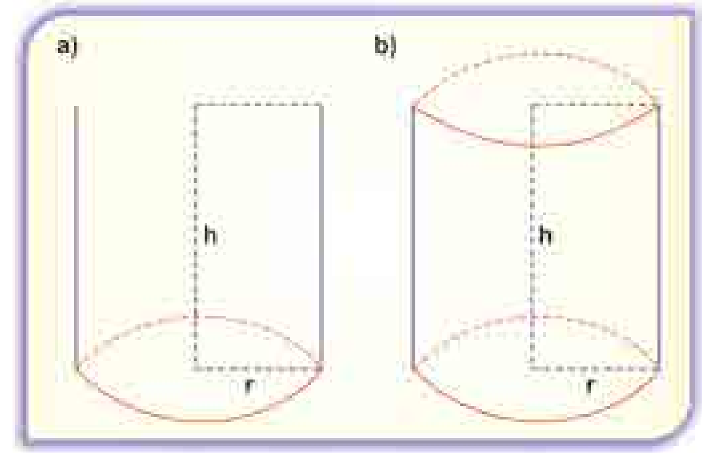
$A' = 20 - 2b$
$20 - 2b = 0$ entonces b = 10. Si se reemplaza en la relación obtenida en el paso 3, resulta: $a = 20 - 10 = 10$.

Por tanto las dimensiones buscadas son largo = 10 m y ancho = 10 m, es decir se trata de un cuadrado cuya área es 10 m * 10 m = 100 metros cuadrados.

Para probar que para el valor crítico b = 10 la función A presenta un máximo, calculamos la segunda derivada: $A'' = -2b^{o}$ y reemplazamos el valor de **b**:
$A'' = -2(10^{o}) = -2 < 0$, entonces para b = 10 la función presenta un máximo cuyo valor es A = 20(10) - 100 = 100 metros cuadrados.

Ejemplo 2: se desea construir un recipiente cilíndrico de hojalata cuya capacidad sea de 64 centímetros cúbicos. Determinar las dimensiones que debe tener para que la cantidad de material requerida en su construcción sea la menor posible, suponiendo que: a) El recipiente es abierto por encima; b) El recipiente es cerrado.

Paso 1: la gráfica para las dos situaciones planteadas es:



Paso 2: se desea extremar (hacer mínima en este caso) el área A del cilindro. En la parte a) lo consideramos sin tapa y por tanto se deben tomar el área lateral y el área de una base. Luego: $A = 2\pi rh + \pi r^2$ La función A queda expresada a través del radio r y de la altura h.

Paso 3: como en la ecuación anterior hay más de una variable, es preciso buscar la relación que existe entre las dos variables, que en este caso es el volumen del cilindro, pues $V = \pi r^2 h = 64$ y de aquí podemos despejar h, por ejemplo, para obtener: $h = \dfrac{64}{\pi r^2}$

Paso 4: se reemplaza el valor de h en la ecuación obtenida en el paso 2, así:

$A = 2\pi r\left(\dfrac{64}{\pi r^2}\right) + \pi r^2 \Rightarrow A = \dfrac{128}{r} + \pi r^2$, que es el área del cilindro expresada en función del radio r.

Paso 5: se calculan los extremos de la función anterior. Luego: $A' = 2\pi r - \dfrac{128}{r^2}$

$2\pi r - \dfrac{128}{r^2} = 0 \Rightarrow 2\pi r^3 - 128 = 0 \Rightarrow r^3 = \dfrac{64}{\pi} \Rightarrow r = \dfrac{4}{\sqrt[3]{\pi}}$. Si se reemplaza en la relación obtenida en el paso 3, resulta: $h = \dfrac{64}{\pi\left(\dfrac{4}{\sqrt[3]{\pi}}\right)^2} \Rightarrow h = \dfrac{4}{\sqrt[3]{\pi}}$

Por tanto las dimensiones buscadas son $r = h = \dfrac{4}{\sqrt[3]{\pi}}\, cm$. Para probar que se trata de un mínimo el valor del radio en la segunda derivada de la función:

$A'' = 2\pi + \dfrac{256}{r^3}$. Como $r = \dfrac{4}{\sqrt[3]{\pi}}$, al reemplazar este valor positivo en A'' resulta mayor que cero y por tanto hay un mínimo para el valor crítico de r.

Para la posibilidad b) el paso 1 ya está dado en el caso anterior.

Paso 2: la magnitud que se va a extremar es también el área y para expresar la función basta agregar al área la superficie de la tapa, es decir: $A = 2\pi rh + 2\pi r^2$.

Paso 3: es igual al paso 3 anterior, pues la relación que liga las variables r y h es el mismo volumen.

Paso 4: si se reemplaza el valor de h, queda: $A = 2\pi r(\dfrac{64}{\pi r^2}) + 2\pi r^2 \Rightarrow A = 2\pi r^2 + \dfrac{128}{r}$, que es el área del cilindro expresada en función del radio r.

Paso 5: se hallan los extremos de la función anterior:

$$A' = 4\pi r - \frac{128}{r^2}$$

$$4\pi r - \frac{128}{r^2} = 0 \Rightarrow 4\pi r^3 - 128 = 0 \Rightarrow r^3 = \frac{32}{\pi} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{32}{\pi}} = 2\sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}$$

$$h = \frac{64}{\pi(\sqrt[3]{\frac{32}{\pi}})^2} = \frac{64}{\pi\sqrt[3]{\frac{32^2}{\pi^2}}} = 4\sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}.$$ Luego las dimensiones del cilindro son

Radio $r = 2\sqrt[3]{\dfrac{4}{\pi}}$ cm y altura $h = 2r = 4\sqrt[3]{\dfrac{4}{\pi}}$ cm.

Para probar que se trata del área mínima buscamos la segunda derivada y sustituimos por el valor crítico $r = 2\sqrt[3]{\dfrac{4}{\pi}}$. En efecto: $A'' = 4\pi + \dfrac{256}{r^3}$: luego, $A'' = 4\pi + \dfrac{256}{(2\sqrt[3]{\frac{4}{\pi}})^3}$ resulta mayor que cero y por tanto el área se hace mínima.

Ejemplo 3: hallar dos números positivos cuya suma sea 20 y en forma tal que el producto del cuadrado de uno de ellos por el cubo del otro sea máximo.

Paso 1: sean X e Y los dos números.

Paso 2: se desea extremar (hacer máximo en este caso) el producto del cuadrado de uno de ellos por el cubo del otro, o sea: $P = X^2 Y^3$.

Paso 3: como en la función anterior hay dos variables, X e Y, es preciso buscar la relación que las liga, que para el efecto es la suma de los dos números:
X + Y = 20. Si despejamos X, por ejemplo, queda: X = 20 - Y.

Paso 4: se reemplaza el valor de X en la función P obtenida en el paso 2:

$P = (20 - Y)^2 Y^3 \Rightarrow P = (400 - 40Y + Y^2)Y^3$

$P = 400Y^3 - 40Y^4 + Y^5$

Paso 5: se hallan los máximos o mínimos de la función anterior:

$P' = 1200\,Y^2 - 160\,Y^3 + 5\,Y^4$ (Se busca la derivada de P respecto de Y)

$1200\,Y^2 - 160\,Y^3 + 5Y^4 = 0 \Rightarrow 240Y^2 - 32Y^3 + Y^4 = 0$

$Y^2(240 - 32Y + Y^2) = 0 \Rightarrow Y^2(Y - 12)(Y - 20) = 0$. Luego:

Y = 0 ó Y = 12 ó Y = 20. Los valores críticos 0 y 20 deben descartarse porque en cualquiera de los casos el producto sería cero. Por tanto, si Y = 12 reemplazamos en el paso 3: $X = 20 - 12 = 8$.

Para probar que cuando Y = 12 la función P presenta un máximo, sustituimos el valor crítico 12 en la segunda derivada de la función, así:

$P'' = 2400Y - 480Y^2 + 20Y^3$ entonces P'' = 2400(12) - 480(144)+20(1728) entonces P'' = -5820 que es menor que cero y por tanto la función P presenta un valor máximo.

Ejemplo 4: una parcela rectangular ha de proyectarse al lado del solar de un vecino y ha de tener un área de 10800 metros cuadrados. Si el vecino conviene en pagar la mitad de la cerca medianera, ¿cuáles deben ser la dimensiones de la parcela para que el costo de cercarla sea, para el dueño, el mínimo?

Paso 1: se elabora la gráfica:

Paso 2: la magnitud que debe extremarse es la longitud que se va a cercar, o sea:

$L = 2Y + X + \frac{X}{2}$ (Recuérdese que el vecino paga la mitad de la cerca medianera).

Paso 3: como en la función anterior hay dos variables X e Y, debe buscarse la relación que las liga para poder eliminar una de ellas. Si el área del rectángulo es conocida, entonces: XY = 10800, entonces $Y = \frac{10800}{X}$.

Paso 4: reemplazamos el resultado anterior en el paso 2: $L = 2(\frac{10800}{X}) + \frac{3X}{2}$, en donde la función L aparece expresada en función de X.

Paso 5: se calculan los máximos o mínimos de la función transformada.

$L' = \frac{3}{2} - \frac{21600}{X^2}$ (Derivada de la función)

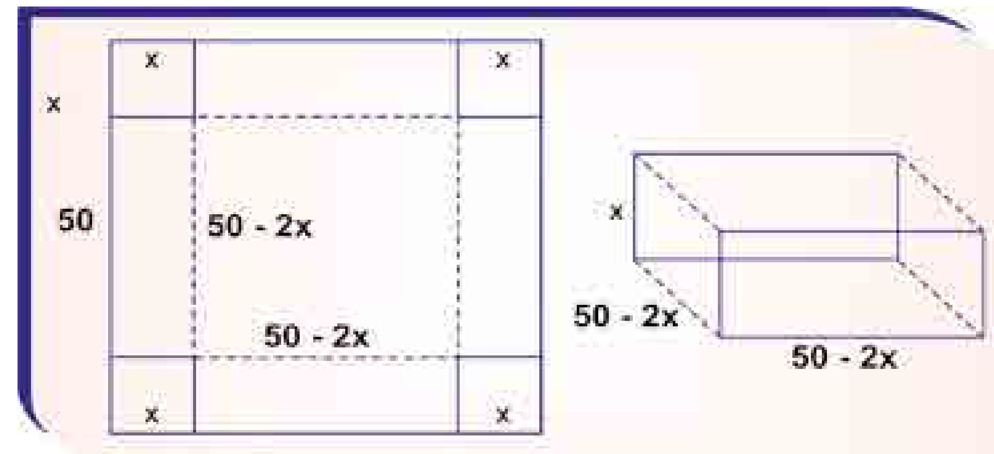
$\frac{3}{2} - \frac{21600}{X^2} = 0 \Rightarrow 3X^2 - 43200 = 0 \Rightarrow X^2 = 14400 \Rightarrow X = \pm 120$.

Si se toma la raíz positiva, X = 120, entonces Y = 90 (Reemplazando en el paso 3).

Luego, las dimensiones son 120 metros x 90 metros.
Para probar que para el valor crítico X = 120 la función presenta un mínimo, sustituimos el 120 en la segunda derivada, así: $L'' = \frac{43200}{X^3}$, entonces $L'' = \frac{43200}{120^3}$ que resulta mayor que cero y por tanto la función L presenta un mínimo.

Ejemplo 5: de una pieza cuadrada de hojalata de lado 50 centímetros, se desea construir una caja, abierta por arriba, del mayor volumen posible, cortando de las esquinas cuadrados iguales y doblando hacia arriba la hojalata para formar las caras laterales. ¿Cuál debe ser la longitud del lado de los cuadrados cortados?

Paso 1: gráficamente, el enunciado se representa así:



Paso 2: lo que se va a extremar (hacer máximo) es el volumen de la caja, o sea: $V = (50 - 2X)^2 X \Rightarrow V = 2500X - 200X^2 + 4X^3$

Paso 3: no se requiere porque la función V está expresada a través de una sola variable.

Paso 4: se calculan los máximos o mínimos de la función V:

$V' = 2500 - 400X + 12X^2$ V' (Derivada de V respecto de x)

$2500 - 400X + 12X^2 = 0$ Se iguala a cero para buscar los valores críticos.

$3X^2 - 100X + 625 = 0$ (Dividiendo por 4)

$(3X)^2 - 100(3X) + 18755 = 0$

$3X^2 - 100X + 625 = 0$

$(3X - 75)(3X - 25) = 0$

3X -75 = 0 entonces X = 25

3X - 25 = 0 entonces X = $\frac{25}{3}$.

La primera raíz se descarta porque si X = 25 en tal caso la hojalata se agotaría y no quedaría material para construir la caja.

Si $X = \frac{25}{3}$, el volumen de la caja se hace máximo y tomaría un valor de:

$V = (50 - 2*\frac{25}{3})^2 * \frac{25}{3} \Rightarrow V = \frac{250000}{27}\ cm^3$ En efecto: $V'' = 24X - 400$ y reemplazando por el valor crítico $\frac{25}{3}$ se tiene: $V'' = 24* \ - 400 = -\frac{800}{3}$, valor menor que cero y por tanto hay un máximo.

Luego cada cuadradito tiene un lado $X = \frac{25}{3}$.

Guiándome por mis apuntes y por los ejercicios resueltos, desarrollo concienzudamente los siguientes problemas, discuto mis resultados con los compañeros del subgrupo y con el profesor para corregir posibles fallos.

Es muy posible que en el campo laboral a usted se le proponga desempeñarse en actividades de elaboración de recipientes para empacar alimentos (potes cilíndricos, cajas, etc.). Para un buen desempeño necesita: aplicar con propiedad las derivadas para el cálculo de valores máximos o mínimos de una función y fundamentalmente se le exigirá gran creatividad en el diseño y producción, por ejemplo de empaques más económicos o de mayor capacidad, lo que contribuirá a que su desempeño laboral sea exitoso.

1) Hallar dos números positivos cuya suma sea 20 y de tal modo que: a) Su producto sea máximo; b) La suma de sus cuadrados sea mínima.

2) Calcular las dimensiones del rectángulo de área máxima que puede inscribirse en un círculo de 5 centímetros de radio.

3) Se desea construir una caja de madera de base cuadrada de 108 decímetros cúbicos de volumen. La parte de arriba debe estar abierta. ¿Qué dimensiones debe tener la caja para que la cantidad de material empleada en su construcción sea mínima?

4) Se desea construir una caja paralelepípeda, abierta por encima, con una hoja rectangular de cartón de dimensiones 8 dm x 15 dm, recortando de las esquinas un pequeño cuadradito. ¿Cuáles serán las dimensiones de la caja para que el volumen sea máximo?

5) Una etiqueta impresa debe contener 50 cm^2 de texto con un margen de 4 cm arriba y abajo y de 2 cm a los lados. ¿Qué dimensiones debe tener la hoja de papel de modo que su área sea mínima?

6) Hallar los catetos de un triángulo rectángulo de hipotenusa 20 cm para que engendre un cono de volumen máximo al girar alrededor de uno de sus catetos.

7) Determinar las dimensiones de un cilindro circular recto de volumen máximo que puede inscribirse en una esfera de radio 10 centímetros. (Ver figura 1, al final de los enunciados).

8) Hallar las dimensiones del cono circular recto de volumen mínimo que se puede circunscribir a una esfera de 8 centímetros de radio. (Ver figura 2, al final de los enunciados).

9) En un instante determinado, un barco B en altamar, se encuentra a 65 kilómetros al ESTE de otro barco A. El barco B comienza a navegar hacia el OESTE con una velocidad de 10 Km/hora, mientras que el barco A se desvía hacia el SUR con una velocidad de 15 Km/hora. Si las rutas iniciales no se modifican, calcular el tiempo transcurrido hasta que la distancia que los separa sea mínima. Hallar además la distancia a que se encuentran. (Ver figura 3, de la siguiente gráfica).

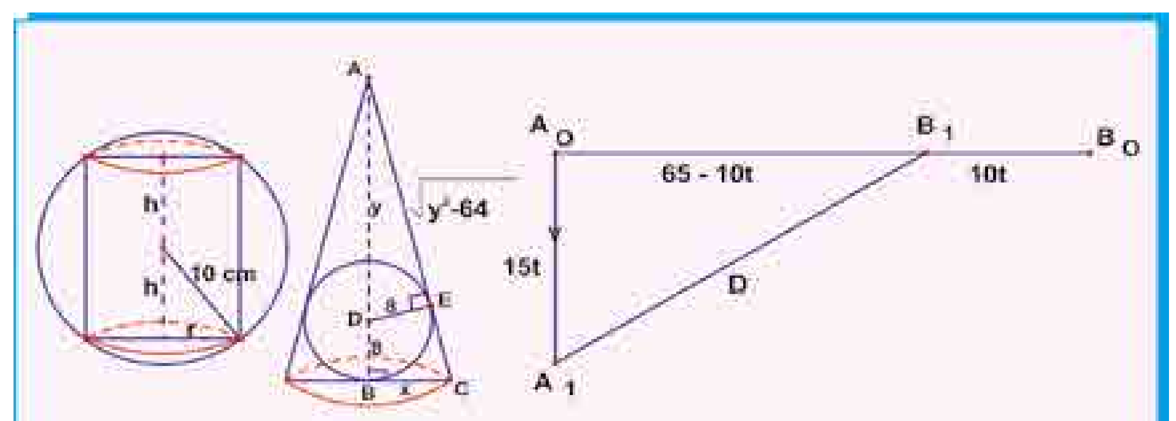


Figura 1 Figura 2 Figura 3

ALGUNAS ACTIVIDADES PARA DESARROLLAR LA CREATIVIDAD

- Dividan al subgrupo en dos, luego uno de ellos lista una serie de seres vivientes y el otro hace una lista de cosas. Ahora, ambos grupos leen el primer término (uno podría decir “elefante” y el otro diría “lápiz”), luego formulen la pregunta: ¿qué le dice el elefante al lápiz? Esperen respuestas y después continúen con el siguiente par de términos y así sucesivamente. Discutan creativamente sus respuestas, así resulten situaciones absurdas. Todo redundará en el fortalecimiento de la competencia.

- Muchas de las grandes innovaciones, inventos, mejoras, avances, empezaron como un “sueño”. ¿Acaso no ha escuchado a aquellos que después de haber logrado algo con mucho éxito expresan que les parecía un sueño?

Resuelvo las siguientes situaciones:

a) ¿Cómo me agradaría que fuera mi institución, comunidad o país?

b) ¿Qué cambios haría si hoy fuera elegido docente, director o presidente de la república?

c) Escribo 5 deseos que me agradaría que se realicen.

D

Como comprobación de mis avances, planteo y resuelvo los siguientes problemas de aplicación.

a. Un granjero desea cercar con una alambrada su parcela, la cual es un campo rectangular de 5000 metros cuadrados de área y uno de cuyos bordes lo constituye el cauce de un río (supuesto linealmente en esa parcela). Si no es preciso cercar la parte que está limitada por el río, calcular: a) Las dimensiones de la parcela para que el costo de cercarla sea el más económico; b) ¿Qué cantidad de alambre debe adquirir si desea colocarle 6 hiladas de alambre de púas?

b. Un campesino dispone de 100 metros de malla metálica y con ella desea hacer un cercado utilizando una pared y cerrando sobre ella un rectángulo. ¿Qué dimensiones debe dar al rectángulo para que el área cercada sea la más grande posible?

c. Suponga que usted tiene una microempresa que produce bocadillos de guayaba que tienen la forma de un paralelepípedo de 4 cm de largo, 3 cm de ancho y 1 cm de espesor. Diseñe una caja de cartón de base cuadrada, con tapa, que permita empacar 2 docenas de bocadillos y de tal manera que se requiera la menor cantidad posible de material, es decir, la caja que resulte la más económica.

Comparta sus respuestas con otros compañeros y, si es posible, asóciense para desarrollar estos problemas en la vida real. Discutan sus proyectos con el profesor para estimar su factibilidad.

ESTUDIO Y ADAPTACIÓN DE LA GUÍA

GUÍA 5

¿Y LA DERIVADA QUÉ TIENE QUE VER CON LA FÍSICA?

Desde 1959, cuando fue lanzado el primer satélite que llevó un instrumento para observación desde el espacio, se han lanzado un gran número que cumplen diversas tareas y cuya posición y velocidad en cualquier instante pueden calcularse mediante la derivada de la función que describe su trayectoria en cualquier instante t.

INDICADORES DE LOGRO

- Usa con propiedad la derivada para calcular la velocidad y la aceleración en un instante **t** de una partícula que se desplaza en línea recta
- Utiliza la derivada de una variable con respecto al tiempo para determinar rapidez de cambio
- Aplica la regla de L'ôpital para eliminar más fácilmente las indeterminaciones

  $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$ en el cálculo de límites

- Hace uso racional de los recursos naturales **(RESPONSABILIDAD AMBIENTAL)**
- Mantiene ordenado su sitio de trabajo
- Participa activamente en los proyectos de mejoramiento ambiental que permiten su vinculación
- Demuestra actitud positiva hacia los problemas que afectan el medio ambiente
- Reconoce y analiza diferentes problemas del medio ambiente

Amén del tema de matemáticas que se desarrollará en esta guía, también trataremos la C.L.G. RESPONSABILIDAD AMBIENTAL que es la “capacidad para relacionarse de una manera racional y armoniosa con el ambiente”.

Estamos en un momento crítico de la historia de la Tierra, en el cual la humanidad debe elegir su futuro. A medida que el mundo se vuelve cada vez más interdependiente y frágil, el futuro depara, a la vez, grandes riesgos y grandes promesas. Para seguir adelante, debemos reconocer que en medio de la magnífica diversidad de culturas y formas de vida, somos una sola familia humana y una sola comunidad terrestre con un destino común. Debemos unirnos para crear una sociedad global sostenible fundada en el respeto hacia la naturaleza, los derechos humanos universales, la justicia económica y una cultura de paz. En torno a este fin, es imperativo que nosotros, los pueblos de la Tierra, declaremos nuestra responsabilidad unos hacia otros, hacia la gran comunidad de la vida y hacia las generaciones futuras.

Estemos, pues, atentos a lo que se comente sobre esta competencia.

A

Leo, analizo y comparto con un compañero lo siguiente. Si necesito escribir lo hago en mi cuaderno de matemáticas.

1) Si $S = t^3 - 4t^2 - 3t$ (S en metros y t en segundos), calculo la ecuación general de los incrementos, luego hallo el incremento relativo de S con respecto de t y uso el resultado para determinar su valor cuando t cambia de 1 a 1.5.

Con relación a mi aula de clase, a mi institución, a mi hogar y en general a mi entorno, ¿qué problemas ambientales se derivan de la mala utilización de los recursos? ¿Me he preocupado por aportar soluciones? Escribo mis respuestas en el cuaderno.

B

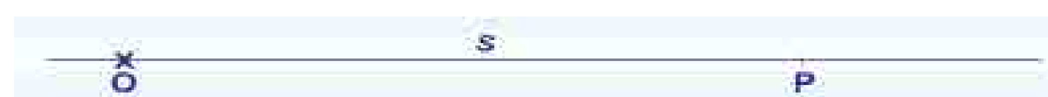
Leo, interpreto y anoto en mi cuaderno de matemáticas los conceptos que aparecen subrayados y si es preciso, elaboro gráficas.

LA DERIVADA COMO RAPIDEZ DE CAMBIO: en la guía anterior se vio que si $Y = X^2$, por ejemplo, entonces $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2X + \Delta x$ y si X = 4 y $\Delta x = 0.5$ entonces $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 8.5$ y se describe la situación diciendo que la rapidez media de variación de Y con respecto a x es igual a 8.5 cuando x cambia de 4 a 4.5.

En general, la razón $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ = rapidez media de variación de Y con respecto de X, cuando X varía desde x hasta $x + \Delta x$.

RAPIDEZ INSTANTÁNEA DE VARIACIÓN: si el intervalo de x a $x + \Delta x$ disminuye, es decir, si $\Delta x \to 0$, entonces la rapidez media de la variación de Y con respecto a X se convierte, en el límite, en la rapidez instantánea de variación de Y con respecto a X , o sea: $\frac{dy}{dx}$ = rapidez instantánea de variación de Y con respecto a X.

Cuando la función es el espacio ***s*** y la variable es el tiempo ***t***, se presentan aplicaciones importantes y precisamente si el movimiento de una partícula **P** a lo largo de una línea recta queda completamente definido por la ecuación s=f(t) (ley del movimiento), siendo $t \geq 0$ el tiempo y ***s*** la distancia de **P** a un punto fijo **O** de la trayectoria se establece que la velocidad de P, en un instante ***t***, es: $v = \frac{ds}{dt}$. La trayectoria de **P** se muestra en la gráfica:



Si v>0, P se mueve en la dirección creciente de *s* (a la derecha).
Si v<0, P se mueve en la dirección decreciente de *s* (a la izquierda).
Si v=0, P está en reposo en dicho instante.

Igualmente, la aceleración de P, en un instante t, es: a = $\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d^2s}{dt^2}$

Si a>0, v aumenta; si a<0, v disminuye.
Si v y a tienen el mismo signo, la rapidez (módulo de la velocidad) de P aumenta.
Si v y a tienen signo contrario, la rapidez de P disminuye.

Ejemplo 1: la ley del movimiento rectilíneo de un cuerpo viene dada por $s = \dfrac{t^3}{2} - 2t$

(**s** en metros, **t** en segundos). Calcular su velocidad y su aceleración al cabo de 2 segundos.

Solución: por los apuntes anteriores:

$v = \dfrac{ds}{dt} = \dfrac{3t^2}{2} - 2$. Si t=2 seg., $v = \dfrac{3(2)^2}{2} - 2 = 4\dfrac{m}{Seg}$

$a = s'' = \dfrac{dv}{dt} = 3t$. Si t=2 seg., $a = 3(2) = 6\dfrac{m}{Seg^2}$

Ejemplo 2: un cuerpo se mueve sobre una recta de acuerdo con la ley $S = t^3 - 4t^2 - 3t$, S en metros y t en segundos. Hallar la aceleración que posee cuando la velocidad es nula.

Solución:

$v = \dfrac{ds}{dt} = 3t^2 - 8t - 3$ y $a = \dfrac{d^2s}{dt^2} = 6t - 8$.

La velocidad es nula cuando $\dfrac{ds}{dt} = 0$, o sea:

$3t^2 - 8t - 3 = 0 \Rightarrow (3t+1)(t-3) = 0 \Rightarrow t = -\dfrac{1}{3} \vee t = 3$. Como t debe de ser positivo, se descarta la raíz $t = -\dfrac{2}{3}$ y si se reemplaza t=3 seg. en la aceleración, resulta:

a = 6(3) - 8 = 10 $\dfrac{m}{Seg^2}$, que es la solución.

Ejemplo 3: el espacio recorrido por un móvil en línea recta viene dada por la ecuación $s = t^3 - 6t^2 + 9t + 4$ (**s** en metros, **t** en segundos):

a) Hallar s y a cuando v = 0
b) Hallar s y v cuando a = 0
c) ¿Cuándo aumenta s?
d) ¿Cuándo aumenta v?
e) ¿Cuándo cambia el sentido del movimiento?

Solución:

a) $v = s' = 3t^2 - 12t + 9$. Si v=0, $3t^2 - 12t + 9 = 0 \Rightarrow t^2 - 4t + 3 = 0 \Rightarrow$
$(t-1)(t-3) = 0 \Rightarrow t = 1 \vee t = 3$

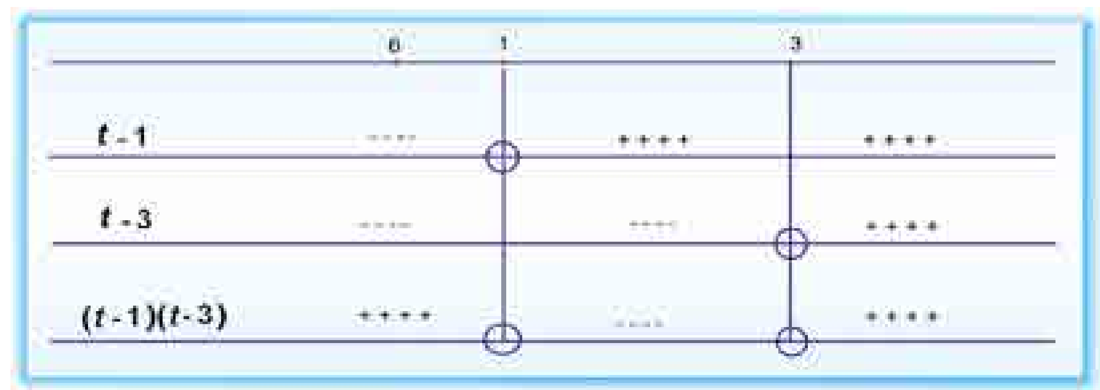
Si **t** = 1 **entonces** $s = (1)^3 - 6(1)^2 + 9(1) + 4 = 8$ m y
$a = s'' = 6t - 12 = 6(1) - 12 = -6 \dfrac{m}{seg^2}$.

Si t = 3 **entonces** $s = (3)^3 - 6(3)^2 + 9(3) + 4 = 4$ m y
$a = s'' = 6(3) - 12 = 6 \dfrac{m}{seg^2}$

b) Si a = 0, entonces s'' = 6t - 12 = 0, entonces t = 2 segundos.
Si t = 2 **entonces** $s = (2)^3 - 6(2)^2 + 9(2) + 4 = 6$ m y
$v = s' = 3(2)^2 - 12(2) + 9 = -3 \dfrac{m}{seg}$.

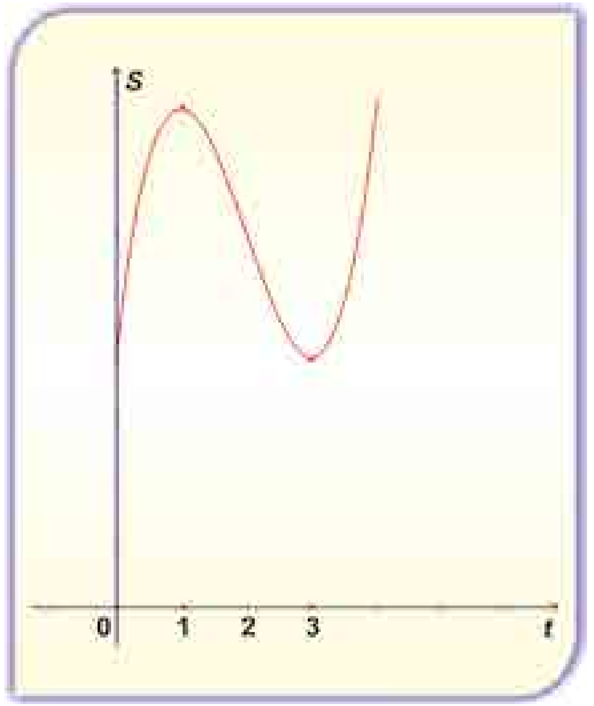
c) s aumenta cuando v>0. Luego: $3t^2 - 12t + 9 > 0 \Rightarrow$
$t^2 - 4t + 3 > 0 \Rightarrow (t-1)(t-3) > 0 \Rightarrow$
Si $t - 1 > 0 \Rightarrow$ **t**>1; Si **t** - 3 > 0 $\Rightarrow$ **t** > 3

Si llevamos estos resultados a un eje real, se ve que la velocidad es positiva en $[0,1[\cup]3,\infty[$. (Recuérdese que t no puede ser negativo). Luego s aumenta en esos mismos intervalos.



d) v aumenta cuando a>0. Luego: $6t - 12 > 0$ entonces $t > 2$. Luego la velocidad aumenta en el intervalo $]2,\infty[$.

e) El sentido del movimiento cambia cuando $v = 0$ y $a \neq 0$, condiciones que se cumplen cuando $t = 1$ segundo ó cuando $t = 3$ segundos. (En la siguiente gráfica, se ven los resultados obtenidos en c), d) y e)):



VARIACIONES CON RESPECTO AL TIEMPO

En muchos problemas intervienen variables que son funciones del tiempo. Si las condiciones del problema permiten establecer relaciones entre las variables, entonces mediante la derivación es posible hallar una relación entre la rapidez de variación de las variables.

Como guía general para la solución de problemas sobre rapidez de cambio, pueden darse los siguientes pasos:

1) Construir una figura que interprete el enunciado del problema, y representar con x, y, z, etc. las cantidades que varían con el tiempo.

2) Obtener una relación entre las variables implicadas que se verifique en un instante cualquiera.

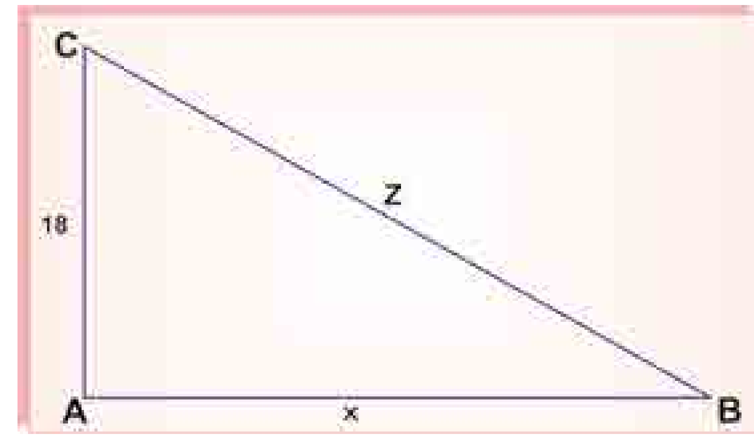
3) Derivar con respecto al tiempo.

4) Hacer una lista de las cantidades dadas y de las buscadas.

5) Sustituir en el resultado de la derivación (paso 3) las cantidades dadas y resolver con respecto a las que se buscan.

Ejemplo 4: un hombre camina 7.5 Km por hora hacia la base de una torre que tiene 18 metros de alto. ¿Con qué rapidez se acerca a la base de la torre cuando su distancia de la base es 24 metros?

Paso 1:



Sea x la distancia entre el hombre y la base de la torre y z su distancia a la cima de la torre en un instante cualquiera t.

Paso 2: en el triángulo rectángulo CAB se cumple que $Z^2 = -X^2 + 18^2$

Paso 3: derivando con respecto al tiempo, se tiene: $2z\dfrac{dz}{dt} = 2x\dfrac{dx}{dt}$, o sea:

$\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{x}{z}\dfrac{dx}{dt}$, lo que significa que la rapidez de variación de z es igual a $\dfrac{x}{z}$ veces la rapidez de variación de x.

Paso 4: lista de las cantidades dadas y de las buscadas:

$x = 24;\ \dfrac{dx}{dt} = -7.5\dfrac{Km}{Hora} = -7500\dfrac{m}{Hora}$ (negativa porque la distancia está disminuyendo al acercarse a la torre).

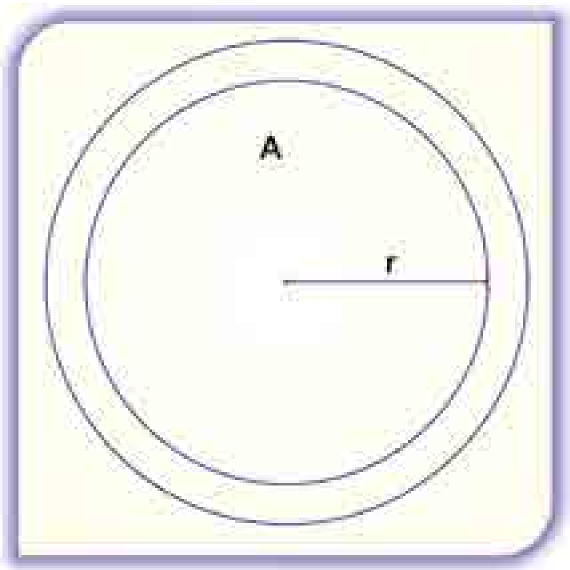
$z = \sqrt{x^2 + 324} = \sqrt{576 + 324} = 30;\ \dfrac{dz}{dt} = ?$

Paso 5: se sustituye en la ecuación obtenida en el paso 3:

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{24}{30} * 7500 \frac{m}{Hora} = -6 \frac{Km}{Hora}$$

Ejemplo 5: una placa circular de metal se dilata por el calor de manera que su radio aumenta con una rapidez de 0.01 centímetros por segundo. ¿Con qué rapidez aumenta el área cuando el radio es de 2 centímetros?

Paso 1: dibujamos la gráfica.



Sea r el radio del círculo y A su área.

Paso 2: relación entre las variables implicadas:

$A = \pi r^2$

Paso 3: se deriva: $\frac{dA}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt}$, es decir, el área de la placa (expresada en centímetros cuadrados) aumenta $2\pi r$ veces más rápidamente que lo que aumenta el radio en centímetros lineales.

Paso 4: lista de los elementos dados y de los buscados:

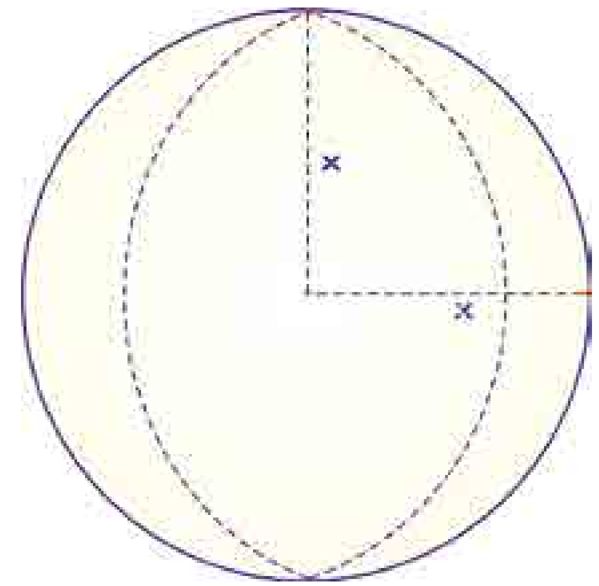
$$r = 2; \quad \frac{dr}{dt} = 0.01; \qquad \frac{dA}{dt} = ?$$

Paso 5: se sustituye en la ecuación obtenida en el paso 3:

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi * 2 * 0.01 = 0.04\,\pi \frac{cm^2}{Seg}$$

Ejemplo 6: un gas escapa de un globo esférico a razón de 2 metros cúbicos por minuto. Hallar la rapidez con que cambia la superficie cuando el radio del globo es de 12 metros.

Paso 1: se construye la gráfica:



Sean x el radio de la esfera, A su área y V su volumen.

Paso 2: $A = 4\pi x^2$ y $V = \frac{4\pi x^3}{3}$

Paso 3: $\frac{dA}{dt} = 8\pi x \frac{dx}{dt}$ y $\frac{dV}{dt} = 4\pi x^2 \frac{dx}{dt}$

Paso 4: $\frac{dV}{dt} = -2 \frac{m^3}{min}$ (Negativo porque el volumen está disminuyendo)

$\frac{dA}{dt} = ?; \quad x = 12$ m

Paso 5: $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{4\pi x^2} \frac{dV}{dt}$ (Despejando en el cambio del volumen del paso 3)

$$\frac{dA}{dt} = 8\pi * \ 12 * \ \frac{1}{4\pi(12)^2}(-2) \Rightarrow \frac{dV}{dt} = -\frac{1}{3}\frac{m^3}{min}$$

OTRA APLICACION DE LAS DERIVADAS

En guía anterior, en el cálculo del límite de funciones, se dijo que las formas $\frac{\infty}{\infty}$ ó $\frac{0}{0}$ se llaman "formas indeterminadas" que por lo general se pueden eliminar por métodos algebraicos, aunque en ocasiones resultan bastante largos. Es aquí en donde las derivadas permiten destruir las indeterminaciones usando la regla de L'ôpital, que consiste en derivar tanto el numerador como el denominador de la fracción antes de dar el paso al límite. Si la indeterminada no se elimina con este artificio, debe reiterarse calculando la segunda, la tercera...derivadas. Algunos ejemplos ilustran esta aplicación de la derivada.

Ejemplo 1: $\lim_{x \to 1} \frac{3X^2 - 3}{3X^2 - 2X - 1}$

Si se da el paso al límite, resulta: $\frac{3-3}{3-2-1} = \frac{0}{0}$, que es una forma indeterminada

Si se factoriza, resulta $\lim_{x \to 1} \frac{3(X-1)(X-1)}{(X-1)(3X+1)}$

Eliminando el factor $X - 1$, que aparece en la expresión anterior, la indeterminada desaparece, dando como resultado: $\lim_{x \to 1} \frac{3(X+1)}{3X+1} = \frac{3(2)}{3+1} = \frac{3}{2}$, que es el valor del límite.

Si se aplica la regla de L'ôpital, que consiste en calcular la derivada, tanto en el numerador como en el denominador, antes de dar el paso al límite, el resultado se obtiene más rápido, así:

$$\lim_{x \to 1} \frac{3x^2 - 3}{3x^2 - 2x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{6x}{6x - 2} = \frac{6(1)}{6(1) - 2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$, resultado igual al obtenido antes.

Se insiste en que NO SE TRATA DE LA DERIVADA DE UN COCIENTE, sino de derivar tanto el numerador como el denominador de la fracción antes de dar el paso al límite. Si no se elimina la indeterminación, el proceso se reitera, es decir, se derivan los dos elementos de la fracción.

Ejemplo 2: $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + x}{2x^2 + 1}$. Si se da el paso al límite, resulta $\frac{\infty}{\infty}$, que es una indeterminada. Según se vio en guía anterior, la indeterminación se elimina si se dividen todos los términos, tanto del numerador como del denominador de la fracción, entre la variable que tenga el mayor exponente; luego se simplifica antes de dar el paso al límite, así:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2 - 3}{3x^2 - 2x - 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{3x^2}{x^2} - \frac{3}{x^2}}{\frac{3x^2}{x^2} - \frac{2x}{x^2} - \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to \infty} \frac{3 - \frac{3}{x^2}}{3 - \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}} = \frac{3}{3} = 1$$

Si se aplica la regla de L'ôpital, derivando a los dos lados de la fracción y luego dando el paso al límite, queda:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2 - 3}{3x^2 - 2x - 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{3x^2}{x^2} - \frac{3}{x^2}}{\frac{3x^2}{x^2} - \frac{2x}{x^2} - \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to \infty} \frac{3 - \frac{3}{x^2}}{3 - \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}} = \frac{3}{3} = 1,$$ resultado igual al anterior. Nótese que se requirió derivar en dos veces para eliminar la indeterminada.

Como se ve, la regla de L'ôpital agiliza el problema de eliminar ciertas indeterminadas, no sólo de tipo algebraico sino también para las funciones trascendentes, como se verá más adelante.

Leo atentamente el siguiente párrafo y lo comento con los compañeros del subgrupo para sacar algunas conclusiones.

LA TIERRA, NUESTRO HOGAR

La humanidad es parte de un vasto universo evolutivo. La Tierra, nuestro hogar, está viva con una comunidad singular de vida. Las fuerzas de la naturaleza hacen que la existencia sea una aventura exigente e incierta, pero la Tierra ha brindado las condiciones esenciales para la evolución de la vida. La capacidad de recuperación de la comunidad de vida y el bienestar de la humanidad dependen de la preservación de una biosfera saludable, con todos sus sistemas ecológicos, una rica variedad de plantas y animales, tierras fértiles, aguas puras y aire limpio. El medio ambiente global, con sus recursos finitos, es una preocupación común para todos los pueblos. La protección de la vitalidad, la diversidad y la belleza de la Tierra es un deber sagrado.

LA SITUACIÓN ACTUAL

Los patrones dominantes de producción y consumo están causando devastación ambiental, agotamiento de recursos y una extinción masiva de especies. Las comunidades están siendo destruidas. Los beneficios del desarrollo no se comparten equitativamente y la brecha entre ricos y pobres se está ensanchando. La injusticia, la pobreza, la ignorancia y los conflictos violentos se manifiestan por doquier y son la causa de grandes sufrimientos. Un aumento sin precedentes de la población humana ha sobrecargado los sistemas ecológicos y sociales. Los fundamentos de la seguridad global están siendo amenazados. Estas tendencias son peligrosas, pero no inevitables.

¿Qué hacer, entonces? Como la responsabilidad ambiental nos atañe a todos, reflexionemos sobre los siguientes principios que, si se practican, pueden ayudar en la solución o por lo menos a minimizar los daños ecológicos:

1. Respetar la Tierra y la vida en toda su diversidad
2. Cuidar la comunidad de la vida con entendimiento, con pasión y amor.
3. Construir sociedades democráticas que sean justas, participativas, sostenibles y pacíficas.
4. Asegurar que los frutos y la belleza de la Tierra se preserven para las generaciones presentes y futuras.
5. Manejar el uso de recursos renovables como el agua, la tierra, los productos forestales y la vida marina, de manera que no se excedan las posibilidades de regeneración y se proteja la salud de los ecosistemas.
6. Evitar dañar como el mejor método de protección ambiental y cuando el conocimiento sea limitado, proceder con precaución.
7. Reducir, reutilizar y reciclar los materiales usados en los sistemas de producción y consumo y asegurar que los desechos residuales puedan ser asimilados por los sistemas ecológicos.
8. Actuar con moderación y eficiencia al utilizar energía y tratar de depender cada vez más de los recursos de energía renovables, tales como la solar y eólica.
9. Garantizar el derecho al agua potable, al aire limpio, a la seguridad alimenticia, a la tierra no contaminada, a una vivienda y a un saneamiento seguro, asignando los recursos gubernamentales requeridos.

10. Proteger a los animales salvajes de métodos de caza, trampa y pesca, que les causen un sufrimiento extremo, prolongado o evitable.

Valiéndome de los ejemplos propuestos y resueltos, procuro desarrollar las siguientes cuestiones, comparto información con mis compañeros de subgrupo y, finalmente, discutimos nuestros puntos de vista con el profesor para corregir posibles fallas.

1) Considerando s en metros y t en segundos, determinar la velocidad y la aceleración en los siguientes casos, para el valor de t que se especifica:

   a) $s=80t-16t^2$; $t=4$ b) $s = t^2 + \frac{1}{t} + 3$; $t = \frac{1}{2}$

   c) $s = t + \frac{2}{t^2}$; $t=2$ d) $s = 3t^2 + \frac{4}{t^{\frac{1}{2}}}$; $t=4$

2) La longitud del lado de un cuadrado está creciendo a razón de $0.3\ \frac{cm}{Seg}$.

   Determinar la rapidez de cambio del área, cuando el lado mide 15 cm.

3) Sobre un montón de arena de forma cónica está cayendo arena a razón de

   $10\ \frac{dm^3}{min}$. El radio de la base es constantemente igual a la mitad de la altura.

   ¿Con qué rapidez crece la altura del montón cuando la altura es de 5 dm?

4) Un líquido penetra en un tanque cilíndrico vertical de 6 metros de radio a razón de 8 metros cúbicos por minuto. Hallar la variación de la altura del nivel del agua con respecto al tiempo.

5) Una escalera de 20 metros se apoya contra un edificio. Hallar la velocidad a la que se mueve el extremo superior cuando el inferior se aleja del edificio a una velocidad de 2 metros por segundo y se encuentra a una distancia de él de 12 metros.

6) Mediante la regla de L'ôpital eliminar las formas indeterminadas en:

a) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{n^3 + 3n^2}{2n^3 - n}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{4+h} - 2}{h}$

c) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3x^2 - 2x - 1}{x^2 - x}$

7) De acuerdo con los problemas ambientales detectados (sección A) describo cada uno, planteo soluciones, las aplico e informo si han sido efectivas. Comparto mi experiencia con las de otros compañeros para, entre todos, proponer las mejores soluciones.

D

Como aplicación práctica al tema desarrollado acerca de la utilidad de la derivada, analizo lo siguiente:

En nuestro país, aunque no existe información precisa sobre la magnitud de la deforestación, se estima que Colombia tiene una de las cinco mayores tasas de deforestación de bosque húmedo tropical en el mundo.

Las causas a las cuales se atribuye la deforestación en el país son, en orden de incidencia: la expansión de la frontera agropecuaria, la colonización, la construcción de obras de infraestructura, los cultivos ilícitos, el consumo de leña, los incendios forestales y la producción maderera para la industria y el comercio. Este orden de incidencia varía regionalmente.

La leña es el principal combustible utilizado en la cocción de alimentos por los habitantes del sector rural, debido principalmente a la falta de alternativas energéticas. A esto se suma el consumo de leña por sectores productivos, en particular el sector panelero. Para los próximos años, el requerimiento de leña asciende a 11 millones de toneladas/año, concentrándose en las zonas Andina y Atlántica.

Los cultivos ilícitos han destruido miles de hectáreas de cobertura boscosa. En 1991 se encontraban afectados 323 municipios, y en 1994 eran 385. Los ecosistemas amazónicos y andinos son los más afectados por las actividades ilícitas. Se calcula que por cada hectárea de coca sembrada se destruyen 2 Ha. de bosque, y por cada hectárea de amapola se destruyen 2.5 Ha. de bosque. Según estimaciones, durante 1992 se talaron 11 mil Ha. de bosques primarios andinos para cultivar amapola.

Guiándome por el ejercicio 7 de la sección C en la guía 1 de esta unidad, calculo la velocidad con la que creció el consumo de leña en toneladas métricas por año en Caldas y en Colombia en el año 2000, de acuerdo con los datos de la tabla que se ve en la gráfica que encontraré después. Utilizo el resultado para calcular aproximadamente el consumo de leña en el 2001, luego en el 2002 y así sucesivamente hasta el 2005.

Cuadro 1
Proyecciones de Consumo de Leña Sector Residencial
Toneladas Anuales - Total Departamental

Departamento	1985	1990	1995	1996	1997	1998	1999	2000
Antioquia	967,413	1,051,475	1,133,180	1,148,441	1,163,874	1,179,490	1,195,283	1,211,263
Atlántico	224,407	252,630	281,493	286,987	292,582	298,281	304,084	309,995
Bolívar	563,652	623,564	684,372	696,063	707,941	720,007	732,264	744,714
Boyacá	686,896	723,449	759,083	765,708	772,376	779,087	785,840	792,636
Caldas	245,195	254,451	262,127	263,201	264,275	265,347	266,418	267,490
Caquetá	157,363	179,114	202,236	206,794	211,456	216,219	221,088	226,057
Cauca	573,386	619,151	663,136	671,509	679,978	688,536	697,188	705,936
Cesar	293,459	327,900	356,785	364,374	371,637	379,037	386,576	394,256
Córdoba	610,395	664,100	717,079	727,021	737,086	747,276	757,592	768,035
Cundinamarca	601,998	650,084	712,694	727,451	742,500	757,843	773,489	789,442
Chocó	226,706	249,617	272,881	277,283	281,750	286,283	290,884	295,553
Huila	324,265	357,595	390,846	397,287	403,753	410,317	416,980	423,742
Guajira	82,246	93,011	103,886	105,992	108,137	110,325	112,554	114,826
Magdalena	432,138	469,963	507,209	514,198	521,273	528,436	535,686	543,025
Meta	120,496	138,869	157,843	161,509	165,297	169,089	173,003	177,010
Nariño	612,224	652,783	694,835	703,010	711,268	719,608	728,032	736,540
Norte de Santander	475,985	518,732	561,874	570,165	578,568	587,082	595,711	604,454
Quindío	63,768	67,447	70,594	71,105	71,619	72,135	72,653	73,174
Risaralda	140,011	155,135	169,892	172,661	175,473	178,327	181,223	184,163
Santander	513,653	554,431	594,716	602,241	609,850	617,541	625,318	633,180
Sucre	354,478	382,459	410,186	415,352	420,575	425,855	431,193	436,589
Tolima	444,023	465,379	484,298	487,431	490,576	493,730	496,895	500,070
Valle	430,994	469,276	507,160	514,277	521,484	528,781	536,170	542,651
Ex. Territorios Nacionales	254,261	301,315	350,514	359,850	396,475	379,403	389,638	400,196
TOTALES	9,399,805	10,222,132	11,048,990	11,209,912	33,372,700	11,538,863	11,705,774	11,876,018

Fuente: Torre José Eddy, Perspectivas de sustitución de leña por carbón mineral. ECOCARBÓN Santafé de Bogotá, D.C. Octubre 1995.

En esta sesión todos los integrantes del grupo analizamos el fenómeno de la deforestación y convenimos qué acciones podemos cumplir en nuestra comunidad para contrarrestar este fenómeno. No olvidemos que todos somos responsables de la conservación de nuestros recursos forestales.

INFORMÉMONOS

Es conveniente conocer los artículos de nuestra Carta Política sobre protección del medio ambiente y estar muy atentos a las decisiones que se tomen al pactar el TLC, por ejemplo, pues una equivocación nos puede resultar muy cara.

Artículo 79. Todas las personas tienen derecho a gozar de un ambiente sano. La ley garantizará la participación de la comunidad en las decisiones que puedan afectarla.

Artículo 80. El Estado planificará el manejo y aprovechamiento de los recursos naturales, para garantizar su desarrollo sostenible, su conservación, restauración o sustitución.

Además deberá prevenir y controlar los factores de deterioro ambiental, imponer las sanciones legales y exigir la reparación de los daños causados.
Así mismo, cooperará con otras naciones en la protección de los ecosistemas situados en zonas fronterizas.

Artículo 81. Queda prohibida la fabricación, importación, posesión y uso de armas químicas, biológicas y nucleares, así como la introducción al territorio nacional de residuos nucleares.

ESTUDIO Y ADAPTACIÓN DE LA GUÍA

UNIDAD 5

LAS FUNCIONES TRASCENDENTES: PROPIEDADES Y DIFERENCIACION

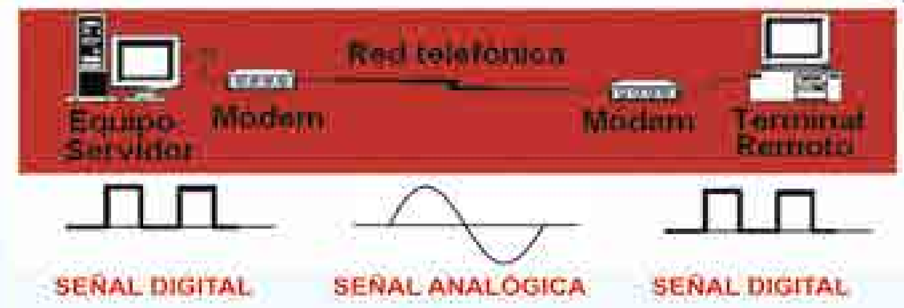
La población mundial crece rápidamente, pero ¿qué tan rápido? Una ecuación exponencial como es $P(t)=P_0e^{kt}$ un modelo matemático tal que si se calcula $P'(t)$, es posible hallar el crecimiento en un instante t

LOGROS

- Identifica y aplica las fórmulas para calcular las derivadas de las funciones trigonométricas
- Describe las funciones exponencial y logarítmica, enfatizando en la equivalencia entre las dos nomenclaturas para facilitar su manejo
- Identifica y aplica correctamente las fórmulas para derivar las funciones exponencial y logarítmica.
- Planea, organiza, integra, dirige y controla procesos en su entorno familiar, escolar y social **(GESTIÓN Y ADMINISTRACIÓN)**
- Reconoce y valora sus potencialidades y limitaciones emocionales, afectivas e intelectuales **(PERSONAL)**

GUÍA 1

LA DERIVADA DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS



Existen fenómenos naturales, como el sonido y la luz, que se propagan en forma de ondas y pueden ser descritos mediante funciones trigonométricas continuas, como sen α; son las señales analógicas. Los computadores sólo pueden manejar señales digitales, conformadas por 1 ó 0: pasa corriente ó no pasa corriente. Precisamente hoy en día la comunicación entre ordenadores es fundamental, y por lo general se hace a través de señales analógicas. Esta limitación se ha resuelto mediante el MÓDEM (acrónimo de MODULADOR - DEMODULADOR), dispositivo que convierte la señal digital generada en un computador en analógica y ésta de nuevo en digital para ser interpretada por otro computador remoto.

INDICADORES DE LOGRO

- Construye las gráficas de las funciones trigonométricas SenX, CosX y TanX, ya sea manualmente o usando una aplicación como CABRI, para establecer el dominio y el rango de ellas
- Reconoce las fórmulas para calcular las derivadas de las funciones trigonométricas, las mecaniza y maneja con propiedad
- Plantea y resuelve problemas de aplicación
- Asume una actitud crítica frente a las necesidades de su entorno **(GESTIÓN Y ADMINISTRACIÓN)**
- Identifica métodos para reconocer problemas y necesidades en su entorno escolar, familiar y social
- Identifica las etapas para plantear un proyecto

- Plantea acciones para resolver situaciones acordes a su edad
- Organiza los recursos disponibles para alcanzar los objetivos previamente determinados
- Dirige responsablemente las diferentes acciones involucradas en los procesos, que son el conjunto de etapas secuenciales que conducen a la obtención de resultados
- Evalúa los resultados para mejorar procesos
- Formula su proyecto aplicando los respectivos análisis

Además del tema de matemáticas que se desarrollará en esta guía, trataremos la C.L.G. **GESTIÓN Y ADMINISTRACIÓN** que es el "proceso mediante el cual se facilita la administración de unidades productivas, que son los espacios donde interactúan diversos factores (procesos, procedimientos, recursos, conocimientos, etc.) para lograr una meta previamente definida, en procura de un desarrollo individual y social y la capacidad para relacionarse de una manera racional y armoniosa con el ambiente".

De acuerdo al concepto de la competencia **GESTIÓN Y ADMINISTRACIÓN**, es nuestra responsabilidad no sólo como definición sino como aplicación al campo laboral. Desde mi vida de estudiante esta competencia me debe ayudar a organizar mejor mis tareas.

Luego en mi empresa o en mi trabajo debo tener muy en cuenta estos elementos y apropiarme de instrumentos que me faciliten y mejoren la **ADMINISTRACIÓN**, como el diagrama de Gant, cronogramas de actividades, cuadros de evaluación y cuadros estadísticos entre otros.

Al desarrollar esta guía, encontrará momentos o situaciones en las que, para resolverlas, deberá demostrar su capacidad para gestionar y administrar.

A

Basándome en conocimientos vistos en otros grados, resuelvo las siguientes cuestiones, todas ellas necesarias para enfrentar con éxito la diferenciación de las funciones trigonométricas. Si se presentan dificultades las allano usando los diferentes medios a mi alcance.

¿Qué sé, en relación con los siguientes conceptos?

a) ¿Qué es la derivada de una función respecto de una variable?

b) ¿Qué es el radián, unidad del sistema natural de medida de ángulos?

c) En una circunferencia, ¿Qué es un arco? Y ¿Qué un sector circular?

d) ¿Qué es longitud de la circunferencia?

e) ¿Qué es área del círculo?

f) ¿Cómo se transforma la expresión SenA - SenB en un producto?

Además, ¿Cómo graficaría un radián, una circunferencia, un círculo, un arco y un sector circular? Para tal fin, demuestro mi capacidad de gestión, consiguiendo la información y los implementos requeridos.

Ahora, con toda sinceridad, respondo lo siguiente:

- ¿He estado involucrado en alguna actividad que me haya traído beneficios económicos o de simple satisfacción personal?
- En caso afirmativo, ¿Reflexioné y planeé la actividad o sólo llegué a ella en forma accidental?
- ¿Con qué recursos conté para su ejecución?
- ¿Cómo puedo evaluar mi desempeño en la ejecución de la actividad?

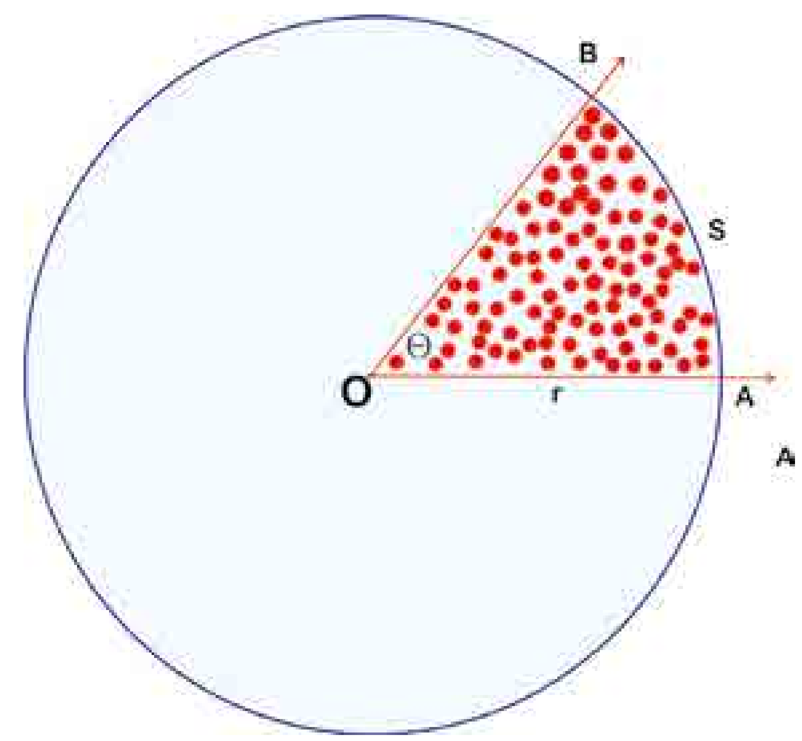
B

Escribo en mi cuaderno de matemáticas lo que aparece en el recuadro verde y si es necesario copio también los ejercicios resueltos que se presentan.

Se describen algunos conceptos que son necesarios para poder comprender la deducción de algunas fórmulas para derivar las funciones trigonométricas.

ARCOS Y SECTORES CIRCULARES: la medida en radianes de un ángulo central de un círculo se utiliza para hallar la longitud del arco que subtiende el ángulo y el área del sector circular determinado por el ángulo central.

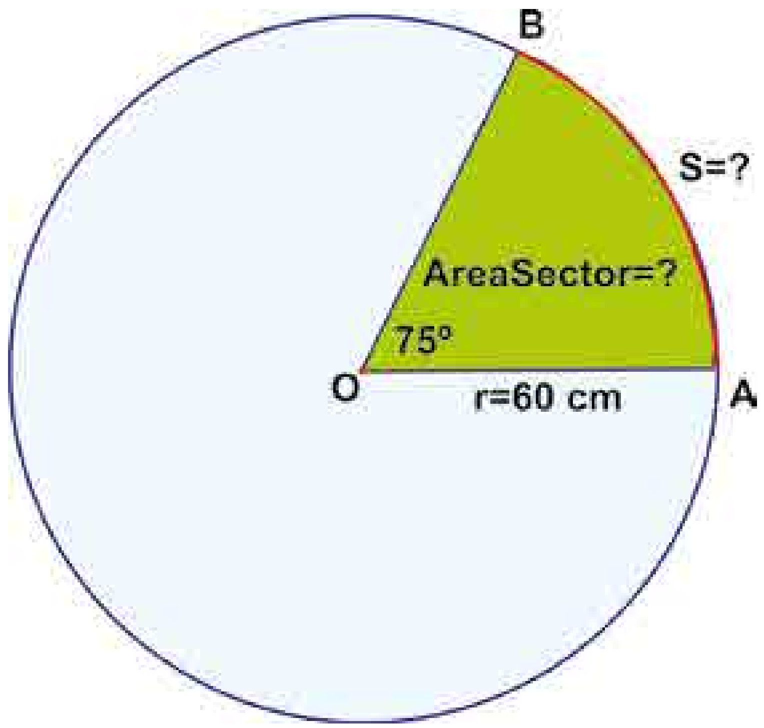
Consideremos el círculo de radio r y la medida en radianes del ángulo central Θ, como se muestra en la figura:



Como la medida del ángulo central Θ y la longitud s del arco son proporcionales (a mayor ángulo mayor arco), es cierta la proporción: $\frac{\Theta}{2\pi}=\frac{s}{2\pi r}$. Luego $s = \Theta r$.

De modo similar, las áreas del sector y del círculo son proporcionales a las medidas de los arcos, se tiene: $\frac{ÁreaSector}{s}=\frac{ÁreaCirculo}{2\pi}$ o sea $\frac{ÁreaSector}{s}=\frac{\pi r^2}{2\pi}$. Luego: $ÁreaSector = \frac{sr^2}{2}$.

Ejemplo 1: el radio de un círculo es 60 centímetros ¿Cuál es la longitud de un arco de ese círculo intersectado por un ángulo de 75º? ¿Cuál es el área del sector respectivo?



Solución: de acuerdo con las deducciones hechas antes, se expresa el ángulo central en radianes: $\Theta = \frac{75^{o}\, x\pi}{180^{o}} = \frac{5\pi}{12}$ (radianes). Luego:

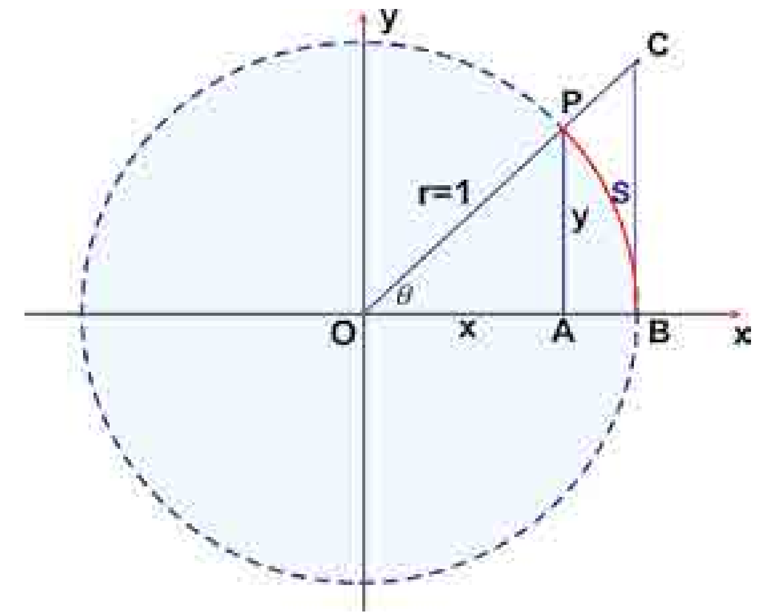
$$s = \Theta\, r = \frac{5\pi}{12} * 60cm = 25\pi cm \approx 78.53cm \qquad \acute{A}rea\ Sector = \frac{sr^2}{2} = \frac{25\pi * 3600cm^2}{2} \approx 141354\, cm^2$$

Ejemplo 2: el extremo del minutero de un reloj recorre $\frac{7\pi}{10}$ centímetros en 3 minutos. ¿Cuál es la longitud del minutero?

Solución: en 3 minutos el minutero genera un ángulo de 18º, pues en 60 minutos barre un ángulo de 360º. Luego, se aplica $s = \Theta r$ y se despeja r, quedando:

$$r = \frac{s}{\Theta} = \frac{\frac{7\pi}{10} cm}{\frac{\pi}{10}} \Rightarrow s = 7cm,$$ que es la longitud del minutero.

LAS FUNCIONES SENX Y COSX DEFINIDAS EN LA CIRCUNFERENCIA UNITARIA



En el triángulo rectángulo OAP: Sen $\theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{1} = y$; Cos $\theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{1} = x$

Ahora, usando los elementos anteriores probaremos que:

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{Sen\theta}{\theta} = 1.$$

En efecto, en la figura anterior: área $\Delta OAP < \acute{A}rea\ Sector\ OBP < \acute{A}rea\ \Delta OBC$, como se ve en la figura. Si aplicamos fórmulas para calcular el área, queda:

$$\frac{xy}{2} < \frac{\hat{s} * r^2}{2} < \frac{OB * BC}{2}$$

Luego: $\frac{Cos\theta\, Sen\theta}{2} < \frac{\hat{s}}{2} < \frac{BC}{2}$. Multiplicando por $\frac{2}{Sen\theta}$, queda:

$$Cos\theta < \frac{s}{Sen\theta} < \frac{BC}{Sen\theta}$$

Pero BC = Tan $\theta = \frac{Sen\theta}{Cos\theta}$ y si se reemplaza, queda:

$$Cos\theta < \frac{s}{Sen\theta} < \frac{1}{Cos\theta}$$

Si tomamos los inversos, el sentido de la inecuación cambia. Luego:

$$\frac{1}{Cos\theta} > \frac{s}{Sen\theta} > Cos\theta$$

Si se pasa de nuevo a minorantes y se da el paso al límite cuando $\theta \to 0$, resulta:

$$Cos0 < \frac{s}{Sen\theta} < \frac{1}{Cos0}$$

Como Cos0=1, queda: $1 < \frac{s}{Sen\theta} < 1$. Si $\frac{s}{Sen\theta}$ es mayor que 1 y a la vez menor que 1, tiene que ser igual a 1. Por tanto, $\lim_{\theta \to 0} \frac{Sen\theta}{\theta} = 1$

Con estos elementos se puede probar que si U = F(x), entonces $\frac{dSenU}{dx} = CosU\frac{du}{dx}$.

En efecto:

1) $y = SenU$ (Función dada)

2) $y + \Delta y = Sen(U + \Delta u)$ (Incrementando tanto la función como la variable)

3) $\Delta y = Sen(U + \Delta u) - SenU$ (Ecuación general de incrementos)

4) $\Delta y = 2Cos(U + \frac{1}{2}\Delta u)Sen\frac{1}{2}\Delta u$ (Pues $SenX - SenY = 2\,Cos\,\frac{1}{2}(X+Y)Sen\,\frac{1}{2}(X-Y)$)

5) $\frac{\Delta y}{\Delta u} = Cos(U + \frac{1}{2}\Delta u)\frac{Sen\frac{1}{2}\Delta u}{\frac{1}{2}\Delta u}$ (Porque multiplicar por 2 equivale a dividir por $\frac{1}{2}$)

6) $\frac{dSenU}{du} = \lim_{\Delta x \to 0} Cos(U + \frac{1}{2}\Delta u) * \lim_{\Delta x \to 0} \frac{Sen\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}$

Y de acuerdo con la demostración anterior: finalmente, como U=F(x), se tiene: $\frac{dSenU}{du} = Cos\ U$ $\frac{dSenU}{dx} = CosU\frac{du}{dx}$, que es la fórmula para derivar el seno de un ángulo y que se enuncia: la derivada del seno de un ángulo es igual al coseno del ángulo por la derivada del ángulo.

Para deducir las fórmulas para derivar las otras funciones trigonométricas se utilizan las relaciones fundamentales, la fórmula anterior y las derivadas de las funciones algebraicas, así: $\frac{dCosU}{dx} = -SenU\frac{du}{dx}$. En efecto:

1) $\frac{dCosU}{dx} = \frac{dSen(\frac{\pi}{2} - U)}{du} = Cos(\frac{\pi}{2} - U)(-1) = -Cos(\frac{\pi}{2} - U) = -SenU$

(Porque las cofunciones de ángulos complementarios son iguales).

2) $\frac{dCosU}{dx} = -SenU\frac{dU}{dx}$, pues U = F(x)

La fórmula queda: la derivada del coseno de un ángulo es igual a menos el seno del ángulo por la derivada del ángulo.

De manera similar, se pueden deducir las fórmulas para derivar las demás funciones, así:

La derivada de la tangente de un ángulo es igual a la secante al cuadrado del ángulo por la derivada del ángulo.

La derivada de la cotangente de un ángulo es igual a menos la cosecante al cuadrado del ángulo por la derivada del ángulo.

La derivada de la secante de un ángulo es igual a la secante del ángulo, por la tangente del ángulo y por la derivada del ángulo.

La derivada de la cosecante de un ángulo es igual a menos la cosecante del ángulo, por la cotangente del ángulo y por la derivada del ángulo.

He aquí un resumen de las fórmulas para diferenciar las funciones trigonométricas, siendo U = F(x):

$$Y = SenU \Rightarrow \frac{dY}{dx} = \frac{dSenU}{dx} = CosU\frac{dU}{dx}$$

$$Y = CosU \Rightarrow \frac{dY}{dx} = \frac{dCosU}{dx} = -SenU\frac{dU}{dx}$$

$$Y = CotU \Rightarrow \frac{dY}{dx} = \frac{dCotU}{dx} = -Csc^2 U \frac{dU}{dx}$$

$$Y = SecU \Rightarrow \frac{dY}{dx} = \frac{dSecU}{dx} = Sec\,UTanU \frac{dU}{dx}$$

$$Y = CscU \Rightarrow \frac{dY}{dx} = \frac{dCscU}{dx} = -Csc\,UCotU \frac{dU}{dx}$$

Para aplicar las fórmulas de diferenciación de las funciones trigonométricas es preciso enfocar el problema, primero, desde el punto de vista algebraico con el fin de identificar las posibles operaciones elementales.

Ejemplo: Calcular $\frac{dY}{dx}$ en:

1) Y = Sen2X.

Solución: $\frac{dY}{dx} = \frac{dSen2X}{dx} = Cos2X \frac{d2X}{dx} = 2Cos2X$ (Derivada de la función Seno de un ángulo).

2) $Y = CosX^2$.

Solución: $\frac{dY}{dx} = -SenX^2 \frac{dX^2}{dx} = -2XSenX^2$ (Derivada del coseno de un ángulo).

3) $Y = Tan^2 X$.

Solución: $\frac{dY}{dx} = \frac{dTan^2X}{dx} = 2Tan\,X\frac{dTanX}{dx} = 2TanXSec^2X$ (Derivada de una potencia en donde la base es TanX).

4) Y= Sec2X.

Solución: $\frac{dY}{dx} = \frac{dSec2X}{dx} = Sec2XTan2X \frac{d2X}{dx} = 2Sec2XTan2X$ (Derivada de la secante de un ángulo)

5) $Y = CotX^2$.

Solución: $\frac{dY}{dx} = \frac{dCotX^2}{dx} = -Csc^2X^2 \frac{dX^2}{dx} = -2XCsc^2X^2$ (Derivada de la cotangente de un ángulo).

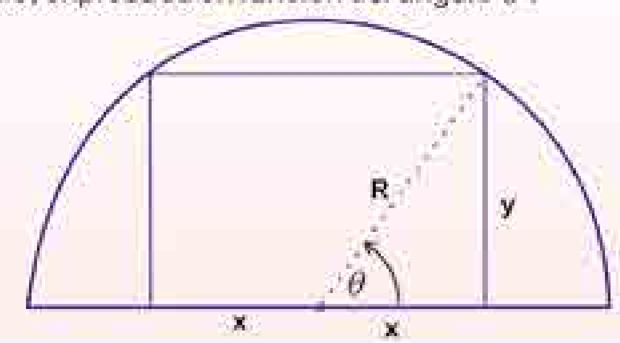
6) Y= Sen2XCosX.

Solución: $\frac{dY}{dx} = \frac{d(Sen2XCosX)}{dx} \Rightarrow$

$$\frac{dY}{dx} = Sen2X \frac{dCosX}{dx} + CosX \frac{dSen2X}{dx} = Sen2X(-SenX) + CosX\,Cos2X \frac{d2X}{dx}$$

(Derivada del producto de dos variables)$\Rightarrow \frac{dY}{dx} = -Sen2X\,SenX) + 2CosX\,Cos2x$

Un rectángulo está inscrito en un semicírculo de radio R, como se muestra en la figura. ¿Cuál es la máxima área de dicho rectángulo, expresada en función del ángulo θ ?



Solución: sean "x" la longitud de la mitad de la base del rectángulo y "y" su altura. Entonces su área es A = 2xy. Como el triángulo rectángulo tiene hipotenusa R y catetos x e y, se tiene que x $RCos\theta$ y $y = RSen\theta$. Como cada valor de θ entre 0 y $\frac{\pi}{2}$ radianes corresponde a un rectángulo inscrito posible, se pueden reemplazar x e y en la fórmula del área, para obtener:

$A = 2R\,Cos\theta(R\,Sen\theta) = 2R^2\,Sen\theta\,Cos\theta$. Luego:

$\frac{dA}{d\theta} = 2R^2(-Sen^2\theta + Cos^2\theta)$ (Derivada de un producto de dos funciones).

$2R^2(-Sen^2\theta + Cos^2\theta) = 0 \Rightarrow -Sen^2\theta + Cos^2\theta = 0$ (Se iguala la derivada a 0 para calcular los valores críticos).

$$Sen^2\theta = Cos^2\theta \Rightarrow \frac{Sen^2\theta}{Cos^2\theta} = 1 \Rightarrow Tan^2\theta = 1 \Rightarrow Tan\theta = \pm 1$$

Como el único valor posible entre 0 y $\frac{\pi}{2}$ tal que tan = 1 es $\theta = \frac{\pi}{4}$, se puede probar por cualquiera de los métodos vistos que para ese valor del ángulo la función A presenta un máximo que es $A = 2R^2 Sen\frac{\pi}{4} Cos\frac{\pi}{4} = 2R^2 \frac{\sqrt{2}}{2} * \frac{\sqrt{2}}{2}$, o sea: $A = R^2$. Las dimensiones del rectángulo son:

Largo = $2x = 2RCos\frac{\pi}{4} = 2R\frac{\sqrt{2}}{2} = R\sqrt{2}$ y Altura = $y = RSen\frac{\pi}{4} = R\frac{\sqrt{2}}{2}$.

C

Con el fin de afianzar el conocimiento de las derivadas de las funciones trigonométricas, resuelvo en mi cuaderno de matemáticas las siguientes cuestiones, comparto mis resultados con los compañeros del subgrupo, discutimos nuestros puntos de vista y después de ponernos de acuerdo hacemos una plenaria con el profesor para detectar posibles falencias. Para la realización de los ejercicios definamos, a manera de planeación, los procedimientos o pasos que vamos a seguir con el fin de lograr una buena calidad. Utilicemos un esquema como el siguiente:

Actividad	*Cuidado especial*	*Resultado esperado*	*Tiempo Requerido*

1. En las funciones siguientes calculo la derivada respecto de la variable.

   a) $Y = Sen4X$
   b) $Y - Sen(3X + 1)$
   c) $Y = Tan3X$
   d) $F(x) - Cos(3X + 1)^2$
   e) $G(x) = CotX^3$
   f) $G(t) = Sec(X^2 \mid X \quad 1)$
   g) $Cot^3(x)$
   h) $Y - Csc2X$
   i) $F(x) - Sen^3 2X$
   j) $Y \quad Sec2XSenX^3$
   k) $Y = \frac{CscX}{TanX}$
   l) $F(x) = X^2 SenX$
   m) $Y = 3Sen2XCosX$
   n) $SenX^2 + CosY^2 = 1$
   o) $SenXCosY^2 - 1 - Y$

2) En el intervalo $[0°, 360°]$ determino los valores del ángulo X para que se satisfagan las siguientes ecuaciones:

   a) SenX = CosX
   b) TanX = SenX

3) También en el intervalo $[0°, 360°]$, busco los valores extremos de las funciones Y = SenX y Y = CosX. Compruebo los resultados elaborando una gráfica de cada una de las funciones, bien sea en forma manual o utilizando la aplicación CABRI II. Comparo mis resultados con los de otros compañeros, justificando las respuestas para llegar a un acuerdo. Invitamos al profesor para solucionar posibles discrepancias.

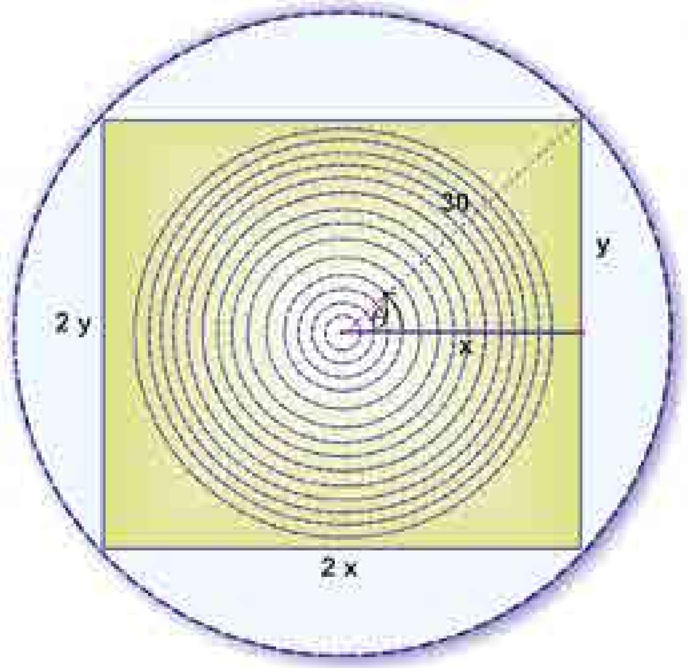
4) Usando CABRI II dibujo, en una mismo sistema de coordenadas cartesianas, las gráficas de SenX y CscX para verificar que en los puntos en donde una de las funciones presenta un máximo su inversa tiene un mínimo, y recíprocamente. Luego, hago lo mismo con las funciones CosX y SecX.

D

Como aplicación a la diferenciación de las funciones trigonométricas, resuelvo un problema de aserradero como el siguiente:

1. Suponga que requiere cortar una viga con una sección trasversal rectangular máxima a partir de un tronco circular con un radio de 30 centímetros, como se

muestra en la figura. Debe calcular las dimensiones del rectángulo y el valor del área, maximizando el área A (de color verde) del rectángulo como una función del ángulo, en forma similar a como se resolvió el último ejercicio en la sección B.



Compare sus resultados con otros compañeros y discutan hasta ponerse de acuerdo.

2. Como éste es un concepto manejado empíricamente por los aserradores, gestionemos y administremos una visita a un aserradero[1], para que nos expliquen y demuestren cómo se calculan los cortes en la madera.

3. Finalmente, hagamos un análisis que nos permita evaluar el desempeño del grupo en la actividad anterior. Para ello podemos tener en cuenta los siguientes indicadores:

 - Planeamiento de la visita usando, por ejemplo, un diagrama de Gant.
 - Distribución de actividades de acuerdo con aptitudes e intereses.
 - Resultados de la actividad.

4. Evaluemos los resultados obtenidos en el desarrollo de la guía, con el fin de mejorar procesos en el desarrollo de otras guías.

[1] Aserradero: sitio donde asierran la madera, la piedra u otras cosas.

ESTUDIO Y ADAPTACIÓN DE LA GUÍA

GUÍA 2

¿Y QUÉ SON LAS FUNCIONES EXPONENCIAL Y LOGARÍTMICA?

La espiral LOGARÍTMICA es la que más se prodiga en la naturaleza. Si observamos las hojas de una rosa, las piñas de piñones o las margaritas, podemos contemplar familias enteras de espirales logarítmicas.
En los efectos devastadores de un tornado encontramos esta curva y los pequeños tornados que se producen en los lavabos dibujan espirales. También existe un molusco llamado NAUTILUS, que presenta la espiral logarítmica.

INDICADORES DE LOGRO

- Identifica y describe las funciones exponencial y logarítmica con sus elementos y construye sus gráficas, ya sea manualmente o usando una aplicación como CABRI
- Maneja la equivalencia entre las funciones exponencial y logarítmica y pasa de una a otra nomenclatura
- Interpreta y usa adecuadamente las propiedades de las funciones exponencial y logarítmica
- Resuelve ecuaciones exponenciales y logarítmicas
- Reconoce las fórmulas para diferenciar las funciones exponencial y logarítmica, las mecaniza y las usa adecuadamente

- Plantea y resuelve problemas de aplicación
- Comprende algunas de sus emociones y sentimientos **(PERSONAL)**
- Reconoce sus factores motivacionales
- Manifiesta en forma apropiada sus sentimientos y emociones
- Identifica algunas emociones de los demás
- Identifica qué cambios debe realizar en su comportamiento y actitud personal
- Se apropia de elementos para la formulación de su proyecto de vida
- Asume la diversidad y sus errores como una oportunidad de aprendizaje

Con un compañero leemos y comentamos el siguiente contenido:

Fuera del tema de matemáticas que trataremos en esta guía, haremos alusión a la **C.L.G. PERSONAL** que “es la capacidad que tiene la persona para reconocer y valorar sus potencialidades, limitaciones emocionales, afectivas e intelectuales”.

1. Estoy próximo a graduarme como bachiller. Es el momento de hacer un inventario de las decisiones que he tomado, al igual que las que debo tomar para orientar mi vida; de la misma manera, reflexionar sobre las expectativas y los temores que despierta en mí el hecho de estar a punto de salir del colegio. Es definitivo aplicar estas reflexiones al campo laboral, ya que las emociones inciden profundamente en el desempeño personal en el mundo del trabajo. La motivación o desmotivación, las emociones que generan insatisfacción, las consecuencias de actuar impulsivamente, etc., son aspectos que deben tenerse en cuenta.

2. Como ya me conozco, elaboro un listado que tenga que ver con los siguientes aspectos:

   a. Decisiones tomadas.

   b. Decisiones que debo tomar hacia el futuro.

   c. Expectativas que tengo al terminar mi bachillerato.

   d. Los temores e inseguridades que tengo frente a mi futuro.

A

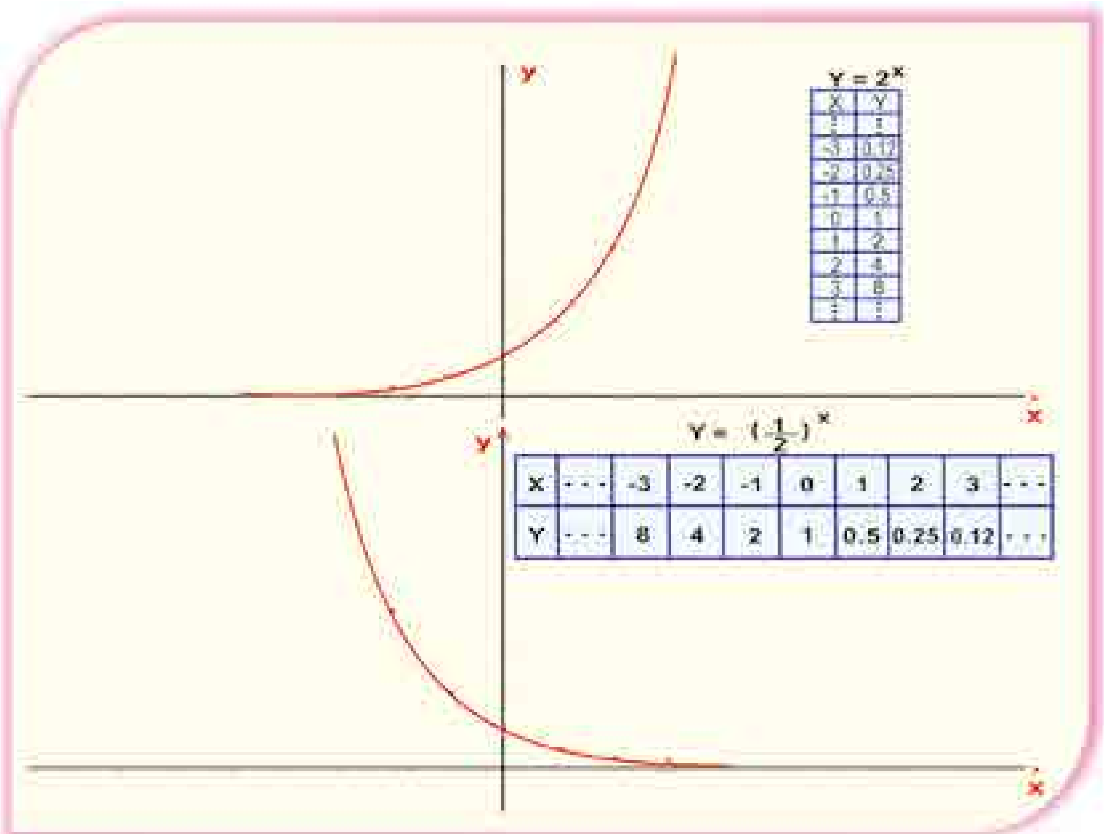
Leo, analizo y comparto con un compañero lo siguiente. Si necesito escribir lo hago en mi cuaderno de matemáticas.

- Defino el dominio y el recorrido de una relación R de A sobre B.
- ¿Cómo puedo obtener la relación inversa?
- ¿Cómo son entre si las gráficas cartesianas de una relación y de su inversa?

  Discuto mis respuestas con otros compañeros del subgrupo y por último compartimos con el profesor para lograr mayor comprensión.

Con los compañeros de subgrupo nos disponemos a analizar los conceptos que sobre funciones exponencial y logarítmica encontramos a continuación. Debe anotarse en el cuaderno de matemáticas lo que aparece en el recuadro verde. Es el momento de conocernos como personas y cómo estamos en relación con esta competencia al realizar nuestro trabajo.

La función exponencial toma la forma $Y = F(x) = b^x$, en donde la base b es un real positivo diferente de 1. Esta función tiene por dominio los reales y por recorrido los reales positivos, como puede comprobarse si se tabulan y grafican las funciones $Y = 2^x$ y $Y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, por ejemplo, como se ve en la gráfica:



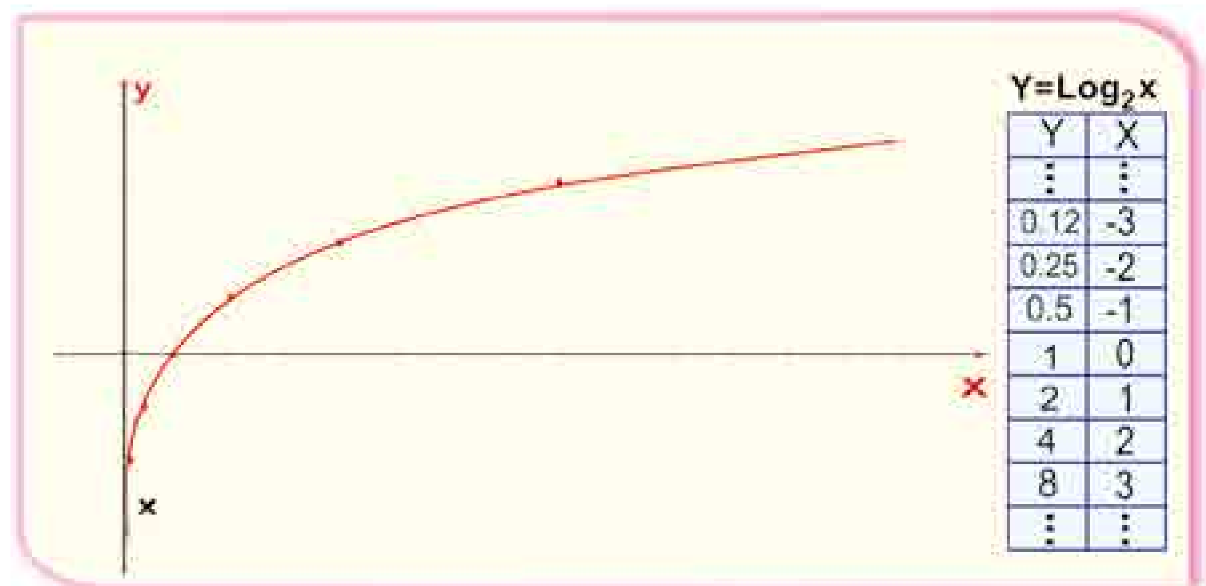
Nótese que en la función exponencial la base es constante y el exponente es variable, a diferencia de las potencias (como en $Y = X^n$), en donde la base es variable y el exponente es constante.

De acuerdo con la gráfica anterior, independientemente del valor de la base b, ¿para cuáles valores de x es b^x igual a 1?

Como propiedades de la función exponencial se tienen: si $b^x = b^y$, entonces x = y (si las bases son iguales, los exponentes también son iguales); y si $a^x = b^x$, entonces a = b (si los exponentes son iguales, las bases también son iguales).

La función logarítmica es la inversa de la función exponencial. En efecto, si en Y=bx se intercambian el dominio y el recorrido para obtener la inversa, resulta X=by, expresión que equivale a $Y = Log_b X$, que es la función logarítmica.

Por definición de inversa, la función logarítmica tiene por dominio los reales positivos y por recorrido los reales, lo que puede verificarse construyendo la gráfica de $Y = Log_2 X$, por ejemplo:



Para obtener la tabla es suficiente invertir los valores de la tabla correspondiente a $Y = 2^x$ elaborada antes, aunque podría calcularse reescribiendo la función logarítmica en su equivalente exponencial y usando luego las propiedades anotadas antes, así:

$Y = Log_2 X \Leftrightarrow 2^y = X$

Si $X = \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{1}{8} = 2^y \Rightarrow 2^{-3} = 2^y \Rightarrow Y = -3$ (Si las bases son iguales, los exponentes también lo son).

Si $X = 8 \Rightarrow 8 = 2^y \Rightarrow 2^3 = 2^y \Rightarrow Y = 3$ (Por la misma razón).

Para la construcción de la curva basta localizar los puntos indicados en la tabla y luego interpolar con un trazo suave. Si se desea elaborar dicha gráfica usando CABRI, por ejemplo, debe tenerse en cuenta que la calculadora sólo maneja los logaritmos de base 10 y los de base natural (en base e) y por tanto un logaritmo que esté en otra base debe ser convertido a uno de estos sistemas mediante la equivalencia: $Log_b N = \frac{Log_a N}{Log_a b}$, como se demostrará más adelante. En el ejemplo propuesto, podemos pasar el logaritmo en base 2 a base 10, así: $Log_2 X = \frac{Log_{10} X}{Log_{10} 2}$.

Para cualquier valor posible de la base b, ¿cuáles valores de x hacen que su logaritmo sea igual a 0? y ¿para cuáles es igual a 1?

Por definición, existe una equivalencia entre las funciones exponencial y logarítmica que puede expresarse así: $n = b^m \Leftrightarrow m = Log_b n$, y resulta muy útil para resolver ecuaciones exponenciales y logarítmicas. En la definición se observa que el logaritmo de un número real positivo n es el exponente m al que debe elevarse la base b para reproducir el número.

Existen infinidad de sistemas de logaritmación, pues la base b es cualquier real mayor que 0 y diferente de 1, pero en las calculadoras (o en tablas ya elaboradas) sólo se utilizan el decimal (base 10) y el natural o neperiano (base e, cuyo valor es aproximadamente igual a 2.71828). El logaritmo decimal de un número N se escribe LogN, omitiendo la base y el logaritmo natural de un número N se escribe lnN.

Ejemplos: escribir las siguientes expresiones en una notación equivalente.

a) $Log_5 25=2$; b) $2^3=8$; c) $Log_3(1/9)=-2$; d) $32^{\frac{2}{5}} = 4$; e)Log 0.001=-3; f)lnX=a;

Solución:

a) $Log_5 25 = 2 \Leftrightarrow 5^2 = 25$
b) $2^3 = 8 \Leftrightarrow Log_2 8 = 3$
c) $Log_3 \frac{1}{9} = -2 \Leftrightarrow 3^{-2} = \frac{1}{9}$;
d) $32^{\frac{2}{5}} = 4 \Leftrightarrow Log_{32} 4 = \frac{2}{5}$
e) $Log 0.001 = -3 \Leftrightarrow 10^{-3} = 0.001$;
f) $\ln X = a \Leftrightarrow e^a = X$

Usando la equivalencia entre las dos notaciones, calcule X ó Y ó b, según el caso:

a) $Y = Log_4 8$. Sol: $Y = Log_4 8 \Leftrightarrow 4^Y = 8 \Rightarrow (2)^{2Y} = 2^3 \Rightarrow 2^Y = 3 \Rightarrow Y = \frac{3}{2}$

b) $log_3 X = -2$. Sol: $Log_3 X = -2 \Leftrightarrow 3^{-2} = X \Rightarrow X = \frac{1}{9}$

c) $Log_b 1000 = 3$. Sol: $Log_b 1000 = 3 \Leftrightarrow b^3 = 10^3 \Rightarrow b = 10$

PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS

1. $Log_b(XY) = Log_b X + Log_b Y$

En efecto: si $m = Log_b X$ y $h = Log_b Y \Rightarrow X = b^m$ y $Y = b^h$

Si multiplicamos ordenadamente queda: $XY = b^{m+h}$

Y pasando a la forma logarítmica se tiene: $Log_b(XY) = m+h$

Reemplazando resulta: $Log_b(XY) = Log_b X + Log_b Y$,
como se quería demostrar.

2. $Log_b\left(\frac{X}{Y}\right) = Log_b X - Log_b Y$

En efecto, si en la primera ecuación de la demostración anterior dividimos ordenadamente, resulta: $\frac{X}{Y} = b^{m-h}$

Y escribiendo en notación logarítmica: $Log_b\left(\frac{X}{Y}\right) = m-h$

Reemplazando: $Log_b\left(\frac{X}{Y}\right) = Log_b X - Log_b Y$, como se quería probar.

3. $Log_b X^n = nLog_b X$

En efecto: si $u = Log_b X \Rightarrow X = b^u$

Si elevamos a la n los dos miembros: $X^n = b^{un}$

Y pasando a notación logarítmica: $Log_b X^n = nu$

Reemplazando: $Log_b X^n = nLog_b X$ como se deseaba demostrar.

4. $Log_a X = \dfrac{Log_b X}{Log_b a}$

En efecto: Si $Y = Log_a X \Rightarrow a^Y = X$

Si tomamos log con base b en los dos lados, resulta:

$Log_b a^Y = Log_b X$, o sea: $YLog_b a = Log_b X$

Despejando queda: $Y = \dfrac{Log_b X}{Log_b a}$

Reemplazando la primera ecuación: $Log_a X = \dfrac{Log_b X}{Log_b a}$ como se quería demostrar.

5. En todo sistema de logaritmos, el logaritmo de la unidad es cero y el logaritmo de la base es uno.

En efecto, $Log_b 1 = 0$, porque toda base $b \neq 0$, elevada a la 0 es 1; y $Log_b b = 1$, porque la base **b** elevada a la 1 es igual a **b**.

Como aplicación de las propiedades enunciadas, encontremos formas logarítmicas más sencillas en los siguientes casos:

a) $Log_b \left(\dfrac{r}{uv}\right)$. Sol: $Log_b \left(\dfrac{r}{uv}\right) = Lob_b r - Log_b (uv) = Log_b r - Log_b u - Log_b v$

(Primero se aplica logaritmo de un cociente y luego logaritmos de un producto).

b) $Log_b \left(\dfrac{m}{n}\right)^{\frac{3}{5}}$. Sol: $Log_b \left(\dfrac{m}{n}\right)^{\frac{3}{5}} = \dfrac{3}{5} Log_b \left(\dfrac{m}{n}\right) = \dfrac{3}{5}(Log_b m - Log_b n)$ (Primero se usa logaritmo de una potencia y luego logaritmo de un cociente).

c) $Log_b \sqrt[5]{mq}$. Sol: $Log_b \sqrt[5]{mq} = Log_b (mq)^{\frac{1}{5}} = \dfrac{1}{5} Log_b (mq) = \dfrac{1}{5}(Log_b m + Log_b q)$.

(Primero se reescribe la expresión sin el radical; se aplica logaritmo de una potencia y luego logaritmo de un producto).

ECUACIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

Son aquellas en las cuales aparecen como variable alguno de los elementos de éstas funciones. Su solución se fundamenta en las propiedades de esas mismas funciones.

En los siguientes casos, resolver la ecuación:

a) $7^{X+2} = 343$. Sol: $7^{X+2} = 343 \Rightarrow 7^{X+2} = 7^3 \Rightarrow X + 2 = 3 \Rightarrow X = 1$

(Si las bases son iguales, los exponentes también lo son).

b) $Log_8 (X + 1) + Log_8 (X + 3) = 1$. Sol: $Log_8 (X + 1) + Log_8 (X + 3) = 1 \Leftrightarrow$

$Log_8 (X + 1)(X + 3) = + Log_8 8$ (Inversión del logaritmo de un producto y por ser el logaritmo de la base igual a 1).

$(X+1)(X+3)=8$ (Eliminando Log_8 a los dos lados de la igualdad). Luego:

$$X^2 + 4X + 3 - 8 = 0 \Rightarrow (X + 5)(X - 1) = 0 \Rightarrow X = -5 \vee X = 1$$

(Resolviendo la ecuación cuadrática resultante). De estas raíces se descarta el - 5 porque a un número negativo no se le puede sacar logaritmo y la solución es X = 1.

RECORDERIS: el interés se llama compuesto cuando los intereses que gana el capital se le suman periódicamente al capital prestado, a intervalos iguales de tiempo, constituyéndose de esa manera en un nuevo capital al final de cada unidad de tiempo.

Si *c* es un capital inicial, prestado a un tanto por uno anual *r* durante *t* años, la fórmula para calcular el capital final o monto *C* es: $C = c(1 + r)^t$, que como se observa es una función exponencial cuya solución puede hacerse de manera sencilla al tomar logaritmos a los dos lados, aplicar las propiedades y luego despejar la variable que se desee.

A propósito, la tasa de interés bancario corriente en Colombia la fija cada mes, la Superintendencia Bancaria y, por ejemplo, para el mes de mayo de 2005 será de 19.02 por ciento anual.

Con respecto a la tasa de interés de usura el Código Penal en el artículo 305 señala:

ARTÍCULO 305 - Usura. El que reciba o cobre, directa o indirectamente, a cambio de préstamo de dinero o por concepto de venta de bienes o servicios a plazo, utilidad o ventaja que exceda en la mitad del interés bancario corriente que para el período correspondiente estén cobrando los bancos, según certificación de la Superintendencia

Bancaria, cualquiera sea la forma utilizada para hacer constar la operación, ocultarla o disimularla, incurrirá en prisión de dos (2) a cinco (5) años y multa de cincuenta (50) a doscientos (200) salarios mínimos legales mensuales vigentes.

Lo anterior significa que tasas de interés que excedan 1.5 veces el interés bancario corriente son de usura. Por ejemplo, tasas de interés superiores al 28,53 por ciento efectivo anual serán usura en mayo de 2005.

Ejemplo 1: cuál es el monto de un capital inicial de \$500000 impuesto al 18% anual durante 3 años.

Solución: aquí el capital inicial es c=500000; como el interés es 18% anual entonces cada peso en un año producirá un interés r= $\frac{18}{100}=0.18$ el tiempo en años es t=3.

Luego: $LogC = Log500000 + 3\log 1.18 \Rightarrow$C=821516 (Monto o capital final).

Ejemplo 2: resolver el problema anterior capitalizando trimestralmente, es decir, sumando los intereses al capital cada 3 meses.

Solución: el capital inicial es c=500000; como en un año hay 4 trimestres, en un trimestre el valor del interés por peso es $r=\frac{0.18}{4}=0.045$; el tiempo en trimestres es t=12. Por tanto: $LogC = Log500000 + 12\log 1.045$. Luego C= 847940.71, que es el monto o capital final.

Ejemplo 3: en cuánto tiempo un capital de \$200000 a un interés anual del 20% se habrá duplicado.

Solución: el capital inicial es c=200000; en un año un peso rinde $\frac{20}{100}=0.2$; el monto o capital final es C=400000. Luego: $LogC = Logc + tLog(1+r)$; despejando t, queda: $t=\frac{LogC - Logc}{Log(1+r)}$; reemplazando: $t=\frac{Log400000 - Log200000}{Log1.2}$; t=3.8 años.

Ejemplo 4: un modelo matemático del crecimiento de la población mundial, para periodos cortos de tiempo, está dado por $P = P_0e^{rt}$, donde:

P_o = Población cuando t = 0
r = Tasa o índice de crecimiento anual (a cierto porcentaje anual)
t = Tiempo en años
P = Población en el tiempo t

¿Cuánto tardará en duplicarse la población de la tierra si continúa creciendo a un ritmo del 1.3% anual?

Aquí, la población inicial es P_o , su duplo será 2 P_0 , $r=\frac{1.3}{100}=0.013$. Luego:

$P = P_0e^{rt} \Rightarrow 2P_0 = P_0e^{0.013t} \Rightarrow 2 = e^{0.013t}$ Si tomamos ln a los dos lados, queda: $\ln 2 = 0.013t$. Y despejando: $t=\frac{\ln 2}{0.013}=53.3$ años.

FÓRMULAS PARA DERIVAR LAS FUNCIONES EXPONENCIAL Y LOGARÍTMICA

El número e se define así: $\lim_{h\to\infty}\left(1+\frac{1}{h}\right)^h = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots \frac{1}{n!} = 2.71828\ldots$

1. Si $Y = Log_bU \Rightarrow \frac{dY}{dx} = \frac{dLog_bU}{dx} = \frac{1}{U}Log_be\frac{dU}{dx}$, si U=f(x)

En efecto: sea $Y = Log_bU$. Si calculamos valores finales, resulta:

$Y + \Delta y = Log_b(U+\Delta u)$, y despejando: $\Delta y = Log_b(U+\Delta u) - Log_bU$

Por las propiedades de los logaritmos: $\Delta y = Log_b\frac{U+\Delta u}{U} = Log_b\left(1+\frac{\Delta u}{U}\right)$

Luego: $\frac{\Delta y}{\Delta u} = \frac{1}{\Delta u}Log_b\left(1+\frac{\Delta u}{U}\right) = \frac{1}{U} * \frac{U}{\Delta u}Log_b\left(1+\frac{\Delta u}{U}\right) \Rightarrow$

Por tanto: $\frac{\Delta y}{\Delta u} = \frac{1}{U}Log_b\left(1+\frac{\Delta u}{U}\right)^{\frac{U}{\Delta u}}$. Si se calcula $\frac{dy}{du}$ queda:

$$\frac{dy}{du} = \lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u} = \frac{1}{U}\lim_{\Delta u\to 0}Log_b\left(1+\frac{\Delta u}{U}\right)^{\frac{U}{\Delta u}} = \frac{1}{U}Log_b\left\{\lim_{\Delta u\to 0}\left(1+\frac{\Delta u}{U}\right)^{\frac{U}{\Delta u}}\right\}$$

Como se dijo antes, la expresión que está entre llaves corresponde a la definición de e. Luego: $\frac{dy}{du}=\frac{1}{U}Log_b e$. Y como U=F(x), se tiene: como se quería probar.

2. Si $Y=b^U \Rightarrow \frac{dY}{dx}=\frac{db^U}{dx}=b^U \ln b\frac{dU}{dx}$ si U = F(x). En efecto:

$Y=b^U \Rightarrow Log_b Y = U Log_b b$ (tomando logaritmos a los dos lados de la igualdad original). Si se deriva implícitamente, resulta:

$\frac{d}{dx}Log_b Y=\frac{d}{dx}U \Rightarrow \frac{1}{Y}Log_b e\frac{dY}{dx}=\frac{dU}{dx}$. Y despejando: $\frac{dY}{dx}=\frac{Y}{Log_b e}\frac{dU}{dx}$.

Como $Y=b^U$ y $Log_b e=\frac{\ln e}{\ln b}=\frac{1}{\ln b}$ al reemplazar queda: $\frac{db^U}{dx}=b^U\ln b\frac{dU}{dx}$

como se deseaba probar.

Ejemplos: calcular $\frac{dY}{dx}$ en los siguientes casos:

a) $Y=Log_b(3X^2-5)$

$$\frac{dY}{dx}=\frac{d}{dx}Log_b(3X^2-5)\Rightarrow\frac{dY}{dx}=\frac{1}{3X^2-5}Log_b e\frac{d(3X^2-5)}{dx}=\frac{6X}{3X^2 5}Log_b e$$

b) $Y=\ln(X+3)^2 \Rightarrow Y=2\ln(X+3)\Rightarrow \frac{dY}{dx}=\frac{d2\ln(X+3)}{dx}\Rightarrow$

c) $Y=\ln(X+3)^2 \Rightarrow \frac{dY}{dx}=\frac{d\ln^2(X+3)}{dx}=2\ln(X+3)\frac{d\ln(X+3)}{dx}\Rightarrow$

$$\frac{dY}{dx}=2\ln(X+3)\left(\frac{1}{X+3}\right)\ln e\frac{d(X+3)}{dx}=\frac{2}{X+3}$$

d) $Y=\ln\frac{X^4}{3X-4}\Rightarrow Y=\ln X^4-\ln(3X-4)\Rightarrow Y=4\ln X-\ln(3X-4)\Rightarrow$

$$\frac{dY}{dx}=\frac{d\,4\ln X}{dx}-\frac{d\ln(3X-4)}{dx}=4\left(\frac{1}{X}\right)-\frac{1}{3X-4}*3=\frac{4}{X}-\frac{3}{3X-4}$$

e) $Y=2^{3x^2}\Rightarrow\frac{dY}{dx}=2^{3x^2}\ln 2\frac{d3X^2}{dx}=2^{3x^2}\ln 2 *6X$

f) $Y=X^2 3^X\Rightarrow \frac{dY}{dx}=X^2\frac{d3^X}{dx}+3^X\frac{dX^2}{dx}\Rightarrow\frac{dY}{dx}=X^2*3^X\ln 3+2X*3^X$

He trabajado las funciones exponencial y logarítmica. Es posible que haya sido un tema complejo para mí, lo que pudo haber generado alguna de las siguientes situaciones, las cuales debo analizar para el conocimiento personal y así proponerme a mejorar estos aspectos.

1) Timidez, temor a las relaciones sociales, apocamiento;

2) Irascibilidad, susceptibilidad, tendencia exagerada a sentirse ofendido;

3) Falta de capacidad de dar y recibir afecto;

4) Recurro a la simulación, la mentira o el engaño;

5) Exceso de autoindulgencia ante mis errores;

6) Dificultad para controlarme en la comida, bebida, tabaco, etc.;

7) Hablar demasiado, presumir, exagerar, fanfarronear, escuchar poco;

8) Resistencia a aceptar las exigencias ordinarias de la autoridad;

9) Dificultad para comprender a los demás y hacerme comprender por ellos;

10) Dificultad para trabajar en equipo y armonizarme con los demás; etc.

¿Cómo puedo superar mis falencias? (Escribo mi respuesta en mi carpeta personal).

Si es mi voluntad, comparto mi autoevaluación con el subgrupo. Esto será de gran utilidad en mi desempeño laboral.

Si se desea afianzar conocimientos, es necesario practicar lo aprendido, pues sólo así alcanzaremos nuestra meta. Por tanto, con un compañero desarrollamos las siguientes actividades:

Escribir las siguientes expresiones en notación exponencial:

1. $Log_2 4 = 2$
2. $Log_5 125 - 3$
3. $Log_3 \frac{1}{81} = -2$
4. $Log 1000 = 3$
5. $Log 0.01 - -2$
6. $Log_3 \frac{1}{27} = -3$
7. $Log \frac{1}{1000} - -3$
8. $\ln 1 = 0$
9. $Log_{125} \frac{1}{5} = -\frac{1}{3}$
10. $Log_5 X = Y$

Escribir en notación logarítmica las siguientes expresiones:

11. $25 = 5^2$
12. $27 = 3^3$
13. $10000 = 10^4$
14. $\frac{1}{100} = 10^{-2}$
15. $\frac{1}{8} = 2^{3}$
16. $1 = 2^0$
17. $6 = 36^{\frac{1}{2}}$
18. $2 = 8^{\frac{1}{3}}$
19. $81 = 27^{\frac{4}{3}}$
20. $\frac{1}{2} = 16^{-\frac{1}{4}}$

Usando las propiedades adecuadas, resuelva la ecuación:

21. $Log_5 X = 2$
22. $Log_{16} X = \frac{1}{2}$
23. $Log_{25} X - -\frac{1}{2}$
24. $Log X = 3$
25. $\ln X = -2$
26. $\ln X - -\frac{1}{2}$
27. $log_x 4 - \frac{1}{2}$
28. $log_x \frac{1}{8} - -\frac{1}{3}$
29. $Log_{(x+1)} 24 = Log_3 24$
30. $Log_2 (X - 1) = Log_2 10$

Calcular la derivada de la función con respecto de la variable en:

31. $Y - 10^x$
32. $Y = 2^{x^2}$
33. $Y - \frac{3^X}{4^X}$
34. $Y = Log Cos X$
35. $Y = 7^{Cos X}$
36. $Y = 2^X 3^{X^2}$
37. $Y - 2^{\ln X}$
38. $Y - log_1 (2X)$
39. $Y = \pi^X + X^\pi + \pi^\pi$
40. $XY + e^{2X} = Y^2 - \ln X$

El desarrollo de la guía hasta este paso, pudo haber dejado en mí una autoestima ALTA Y POSITIVA ó por el contrario, BAJA.

Ahora, determino cómo está mi autoestima mediante el siguiente test; para cada pregunta opto por la respuesta que se acerque más a la manera en que hablo conmigo mismo, pienso en mí o siento dentro de mí mismo. Al escoger cada respuesta, reflexiono sobre como incidirá, positiva o negativamente, en el campo del trabajo.

1. Cuando me levanto por la mañana y me miro al espejo, ¿qué es lo que digo?

   a) ¡Me veo muy bien esta mañana y estoy a punto de tener un gran día!

   b) ¡Oh, no, otra vez me encuentro, no es posible, qué jartera!

2. Cuando fallo en algo o cometo un grave error, ¿qué es lo que me digo a mí mismo?

a) Todo el mundo tiene derecho a fallar o cometer errores todos los días.

b) ¡Ya la embarré otra vez! ¿Es que no puedo hacer nada bien? Parece como si no supiera.

3. Cuando tengo éxito en algo, ¿qué es lo que me digo a mí mismo?

a) ¡Felicidades, debo sentirme orgulloso de mí mismo!

b) Podría haberlo hecho mejor si me hubiera esforzado lo suficiente.

4. Acabo de hablar con alguien que tiene autoridad sobre mí (como uno de mis padres, un entrenador, o un maestro), ¿qué es lo que me digo a mi mismo?

a) He llevado este asunto muy bien.

b) ¡He actuado de una manera tan estúpida! Siempre digo bobadas.

5. Acabo de salir de la primera reunión del club en el que me inscribí, ¿qué me digo a mí mismo?

a) Estuvo divertido, conocí a algunas personas que me agradaron. Y hasta se rieron del chiste que conté.

b) Hablé demasiado y no le caí bien a nadie. A todo el mundo le desagradó mi chiste.

6. Acabo de salir de la casa de un amigo, después de jugar juntos, ¿qué me digo a mí mismo?

a) Fue muy divertido. ¡Realmente le caigo bien a mi amigo!

b) Mi amigo solamente me hizo creer que le caía bien. Probablemente nunca me volverá a invitar.

7. Cuando alguien me dice un cumplido o dice "me caes bien", ¿qué es lo que me digo a mí mismo?

a) ¡Me lo merezco!

b) Nadie me dice un cumplido a menos que quiera algo de mí. Además no me lo merezco.

8. Cuando alguien a quien estimo me falla, ¿qué me digo a mí mismo?

a) Han herido mis sentimientos, pero me repondré. Después puedo tratar de averiguar qué fue lo que pasó.

b) Esto prueba que no le caigo bien a esa persona.

9. Cuando le fallo a una persona que estimo, ¿qué es lo que me digo a mí mismo?

a) No es bueno, y no es gracioso, pero algunas veces las personas llegan a fallar. Reconozco lo que hice y sigo adelante con mi vida.

b) ¿Cómo pude hacer algo tan terrible? Debería sentirme avergonzado de mí mismo.

10. Cuando me siento necesitado o inseguro, ¿qué me digo a mí mismo?

a) Todos se sienten así algunas veces. Me acuesto abrazado a mí almohada, y pronto me sentiré bien.

b) ¡Debo madurar! No puedo ser tan infantil. ¡Eso es muy desagradable!

Para la calificación, anótese 10 puntos por cada respuesta (a) y 5 puntos por cada respuesta (b). Después sume los valores asignados y use la siguiente convención para encontrar la calificación de su autoestima:

90-100 su autoestima es ALTA y POSITIVA.

75-90 su autoestima PODRÍA SER MEJOR.

60-75 su autoestima es BAJA. Pero ahora ya lo sabe y podrá cambiar.

50-60 su autoestima es BAJÍSIMA, pero tratará de superarse.

Como aplicación de las funciones exponencial y logarítmica, desarrollo las siguientes cuestiones:

Las funciones exponencial y logarítmica, amén de abreviar algunas operaciones, tienen aplicación en la solución de problemas relacionados con el crecimiento de poblaciones grandes, en el cálculo de la edad de fósiles con la técnica del carbono 14... Usando el modelo matemático que se indica, desarrollo lo siguiente:

1) De acuerdo con datos de la ONU, la población mundial en el 2000 era de seis mil cien millones. Si la tasa de crecimiento anual es de 1.4%, uso el modelo matemático $P(t) = P_0 e^{Kt}$, en donde P_0 es la población en miles de millones cuanto t=0; K es la tasa de crecimiento anual (n% = $\frac{K}{100}$) y está calculada teniendo en cuenta las tasas de natalidad y de mortalidad de la población; t el tiempo en años y P es la población en el tiempo t. Calculo:

   a) De acuerdo con el modelo, ¿Cuál será la población mundial en el 2010?

   b) ¿En cuántos años se duplicará la población?

   c) ¿Cuándo la población mundial será de 50 mil millones? (ésta es la cantidad que los demógrafos creen será la máxima para que el planeta pueda proporcionar alimento).

2) Alcohol y conducción de vehículos

Es posible determinar la concentración de alcohol en la sangre de una persona mediante un dispositivo que mide el grado de alcoholemia. Investigaciones médicas recientes sugieren que el riesgo R (dado como porcentaje) de tener un accidente automovilístico obedece aproximadamente al modelo matemático $R=6e^{KX}$, donde x: es la concentración de alcohol en la sangre y k una constante.

a) Al suponer una concentración de 0.04 de alcohol en la sangre produce un riesgo del 10% (R = 10) de sufrir un accidente, ¿cuál es el valor de la constante? (Use las propiedades de los logaritmos para despejar k).

b) Utilice el valor de k e indique cuál es el riesgo para diferentes concentraciones de alcohol (0.17, 0.19,...).

c) Con el mismo valor de k indique la concentración de alcohol correspondiente a un riesgo del 100%.

d) Si la ley establece que las personas con un riesgo del 20% o mayor de sufrir un accidente no deben conducir vehículos ¿con cuál concentración de alcohol en la sangre debe un conductor ser inmovilizado y multado?.

e) En el espacio laboral, si soy el conductor de una empresa y manejo con un grado de alcoholismo no permitido, ¿qué consecuencias se pueden presentar para mi estabilidad laboral?

f) ¿Qué sentimientos despierta en usted una persona que conduce en estado de embriaguez?

g) Si usted ha conducido un vehículo habiendo consumido licor, ¿cómo considera esta conducta y qué propósito puede formular para corregirse?

ESTUDIO Y ADAPTACIÓN DE LA GUÍA

UNIDAD 6

NOCIONES DE CÁLCULO INTEGRAL

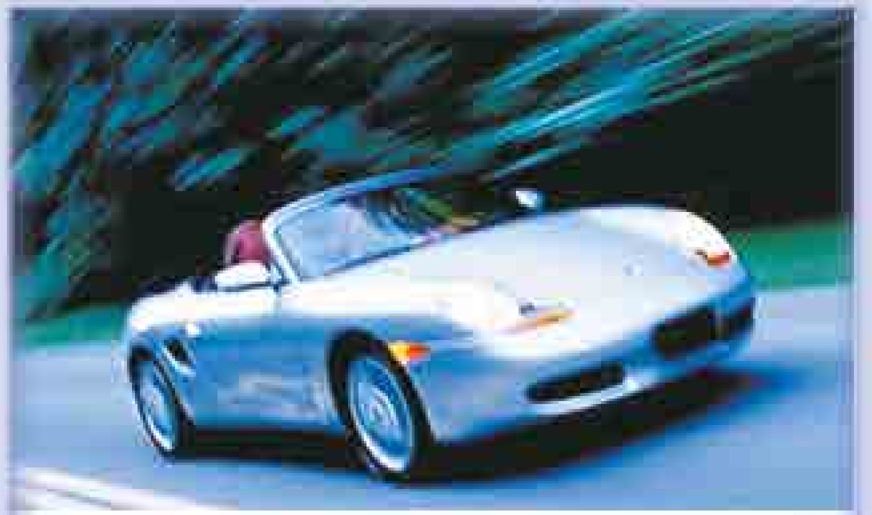
Arquimedes resolvió los primeros problemas relativos al hoy llamado cálculo integral, entre ellos la superficie y el volumen de la esfera.
Newton en un período de menos de 2 años, y con menos de 25 años, sentó las bases del cálculo diferencial e integral, varios años antes de su descubrimiento, en forma independiente, por Leibniz.

LOGROS

- Interpreta la integración como el proceso inverso de la diferenciación
- Identifica y aplica el método de integración adecuado para resolver una ecuación diferencial
- Interpreta el operador sigma como un símbolo para expresar una sumatoria y lo relaciona con la integral definida
- Reconoce los elementos diferenciales que determinan un área o generan un sólido de revolución y que permiten, por integración, calcular su área o su volumen
- Actúa basado en principios y valores sociales y consensuados en los grupos en donde interactúa (AXIOLÓGICA)
- Contribuye con su actitud y comportamiento a mejorar el ambiente (RESPONSABILIDAD AMBIENTAL)
- Comprende y manifiesta los sentimientos y pensamientos sobre algún tema o situación (COMUNICACIÓN)
- Utiliza en forma eficiente las herramientas necesarias para desarrollar los procesos (MANEJO TECNOLÓGICO)
- Participa activa, responsable y colectivamente en el logro de objetivos comunes (TRABAJO EN EQUIPO)

GUÍA 1

LA INTEGRAL INDEFINIDA Y LAS INTEGRALES INMEDIATAS



Aunque los avances tecnológicos han permitido construir autos relativamente seguros, la imprudencia de algunos conductores los toman peligrosos.
Mediante el cálculo integral, las autoridades pueden determinar si la causa de un accidente fue el exceso de velocidad, por ejemplo.

INDICADORES DE LOGRO

- Calcula la ecuación diferencial de una función dada
- Reconoce el símbolo de integración y lo usa para plantear la solución de ecuaciones diferenciales sencillas
- Maneja con propiedad las integrales inmediatas más comunes
- Toma decisiones basadas en principios y valores sociales y particulares **(AXIOLÓGICA)**
- Cuida los bienes ajenos, públicos y del entorno
- Actúa y se desempeña con autodisciplina, sin necesidad de supervisión, en el marco de la autonomía otorgada
- Analiza y reflexiona sobre su comportamiento y el de los otros
- Acepta a los otros sin importar sus condiciones socioculturales
- Respeta los acuerdos consensuados

Leemos y comentamos brevemente el siguiente contenido: cuando hablamos de la competencia **AXIOLÓGICA**, nos referimos a los valores, especialmente los morales, que deben caracterizar al ser humano. Cuando la persona evidencia tener estos valores, podrá tomar decisiones en su vida sin afectar su relación social, es decir, podrá reconocer normas y principios que tiene establecidos la sociedad.

Demostrar esta competencia en el campo laboral, es determinante para un adecuado desempeño, puesto que en los diferentes grupos con los que se interactúa, ya sea la familia o el colegio, existen normas que regulan las relaciones entre las personas. Esta regulación es fundamental para crear condiciones de convivencia, tolerancia, autodisciplina, autonomía y aceptación de los otros, lo que garantiza el cumplimiento de los deberes y la exigencia de los derechos.

Al formular mi proyecto de vida tengo en cuenta determinar qué tipo de valores me van a caracterizar en las actuaciones o desempeños.

A

Con el fin de introducirnos en el cálculo integral, leemos, analizamos y respondemos las siguientes cuestiones:

1. Para las funciones $F(x) = Y = X^4 + 3X^2 - 8X + 3$, $Y = Sen(2X) - CosX$ y $Y = e^{2X} + X^2$ calculamos $\frac{dy}{dx}$. ¿Cómo queda cada expresión si se multiplican los dos miembros por dx? ¿Cómo se leerá cada resultado?

2. Dada $f'(x) = 3X^2$, intentamos hallar una función f(x) de tal modo que al derivarla con respecto de x resulte $3X^2$.

3. Al resolver los ejercicios de la exploración nos damos cuenta de la complejidad de la temática que nos plantea la guía. ¿Qué valores debemos poner en práctica para lograr armonizar en el trabajo y éxito académico? Seleccionemos a un compañero del subgrupo, analicémoslo y atribuyámosle las cualidades que consideremos que él tiene como valores.

Escribimos nuestras respuestas y las comparamos con las de otros compañeros y si hay diferencias las analizamos hasta ponernos de acuerdo.

B

Leemos, interpretamos, interiorizamos y anotamos en nuestros cuadernos lo que aparece en el recuadro verde. Analizamos los ejercicios resueltos y si es necesario los volvemos a resolver.

Hasta ahora se ha estudiado una de las dos ramas principales del cálculo infinitesimal: el **cálculo diferencial**, en donde dada una función Y=f(x) se busca su derivada. Nos centraremos en esta guía en el otro aspecto importante: **el cálculo integral** que, básicamente, consiste en que dada la derivada f ′(x) de una función se debe determinar la función f(x) que la origina. Como se observa, los dos procesos son inversos.

La palabra **integrar** tiene dos interpretaciones en cálculo. Una de ellas coincide con el significado corriente de la palabra, es decir, para indicar el total de algo, una suma de partes. En este sentido la emplearemos para hallar áreas limitadas por curvas y los volúmenes generados por sólidos de revolución. La segunda connotación que tiene en matemáticas la palabra **integrar** es la de encontrar una función conociendo su derivada. Este aspecto es el que vamos a estudiar en esta guía.

Diferenciales

En guía anterior se vio que dada la función $Y = f(x)$, entonces

$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = f'(x)$ (Definición de la derivada de la función con respecto de la variable). Cabe resaltar que $\frac{dy}{dx}$ no debe considerarse como una fracción ordinaria, con dy como numerador y dx como denominador, sino como un símbolo para representar el límite del cociente incremental $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ cuando Δx tiende a 0.

Se define entonces una nueva variable "dy" como el producto de la derivada f'(x) de la función por una segunda variable "dx", o sea: dy = f '(x)*dx (que se lee "diferencial de y es igual a la derivada de Y con respecto a X por la diferencial de x"). A la variable "dy" se le denomina **diferencial de "Y"** y a la variable dx **diferencial de "X"**.

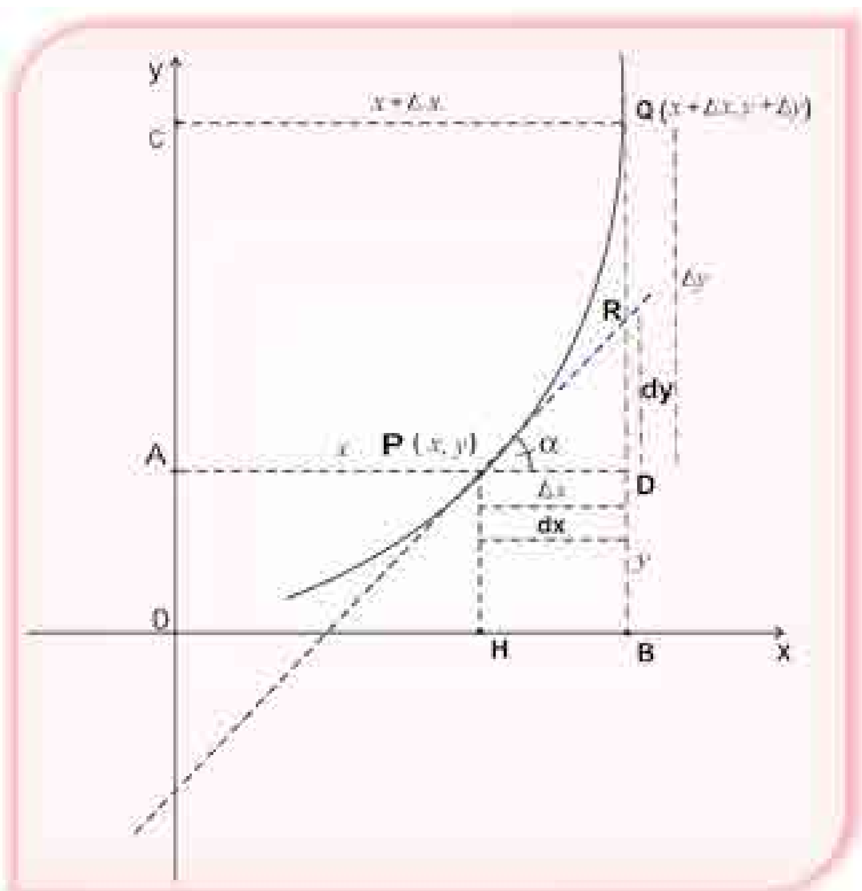
Se observa que para hallar dy es suficiente calcular la derivada de la función respecto de la variable y luego multiplicar a los dos lados de la igualdad por dx, como se sugirió en la actividad inicial indicada en la sección A. Por ejemplo, si $Y = 2X^3 - 4X + 1$, para calcular dy buscamos primero la derivada que es

$\frac{dy}{dx} = 6X^2 - 4$.

Luego $dy = (6X^2 - 4)\, dx$.

Otro ejemplo: si $Y = Cos3X$ entonces $\frac{dy}{dx} = -3Sen3X$. Luego dy = -3Sen3Xdx.

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE dy Y dx:



Ya se vio que si Y = f(x), entonces $\frac{dy}{dx}$ = f '(x) significa la pendiente de la tangente geométrica a la curva en un punto P(x,y) de ella, es decir, $\frac{dy}{dx}$ no es más que la tangente del ángulo α, como se ve en la figura. Si se toma un segundo punto $Q(x + \Delta x, y + \Delta y)$ sobre la curva, esta ordenada corta a la tangente en R y a la horizontal que pasa por P en D. En el triángulo rectángulo PDR se tiene que

$Tan\alpha = \frac{dy}{dx}$. Por tanto, dy = DR y dx = PD y esto nos da una interpretación geométrica de los diferenciales.

Nótese que si Q es muy próximo a P entonces $\Delta x = dx$ y $\Delta y \approx dy$, porque la diferencia entre dy y Δy es RQ que se hace muy pequeña cuando Q tiene a P.

La integral indefinida

Supongamos que se da la función F'(x) y que se quiere hallar otra función y = F(x)

tal que: $\frac{dy}{dx} = F'(x)$. Por ejemplo, si $\frac{dy}{dx}$ = 2X, por nuestros conocimientos de cálculo diferencial se concluye que si la derivada es 2X, la función que la origina es $Y = X^2$. Pero también nos damos cuenta de que esta solución no es única, pues si tomamos $Y = X^2 - 3$ ó $Y = X^2 + \frac{1}{2}$ ó $Y = X^2 + \sqrt{2}$ ó en general

$Y = X^2 + C$, la derivada de la función con respecto a X será 2X, puesto que la derivada de una constante es cero.

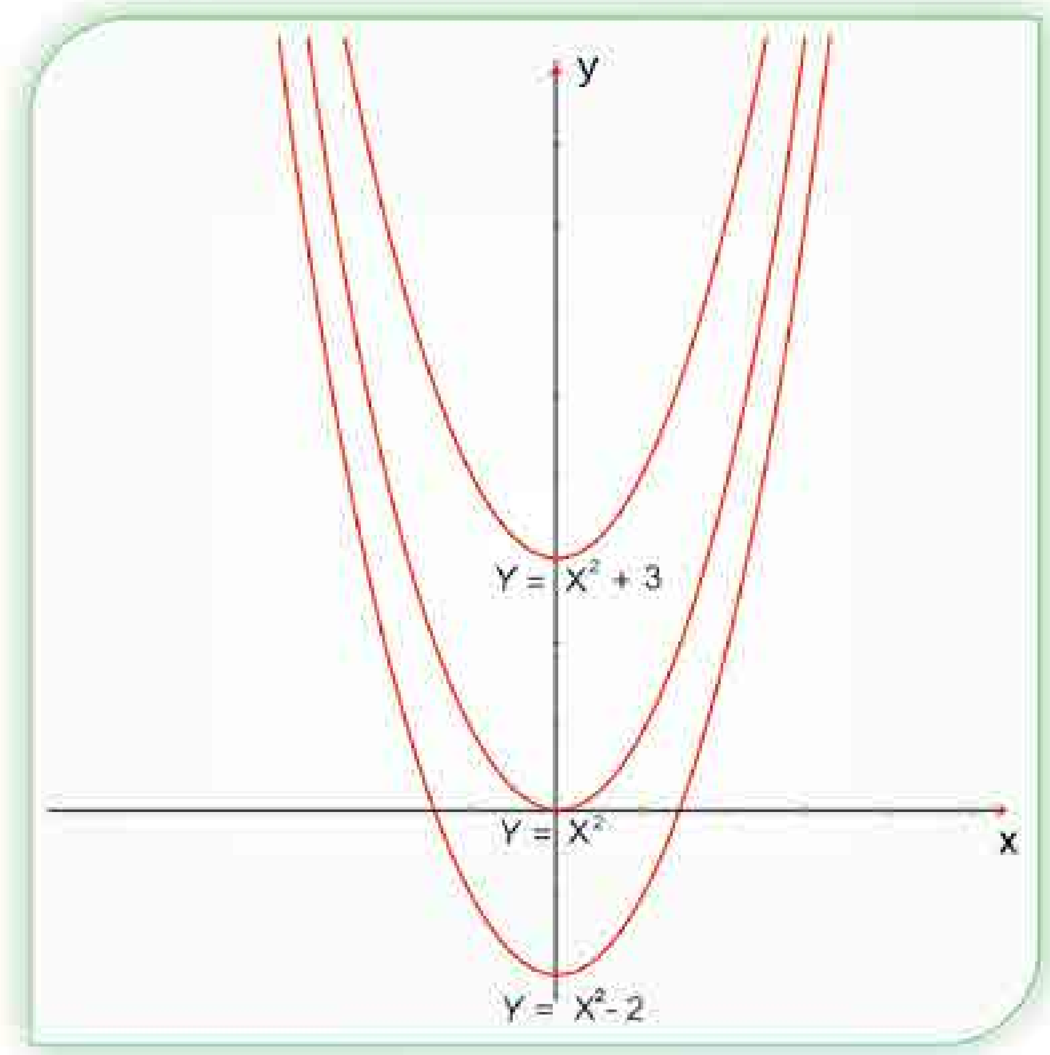
Una expresión como $\frac{dy}{dx} = F'(x)$ se denomina ecuación diferencial, que se transforma en una expresión equivalente si se multiplica a los dos lados por dx, obteniéndose dy = F'(x)dx que es la forma como debe escribirse para separar variables y poder así conseguir su solución, proceso que permite encontrar la función F(x) + C, de donde proviene la derivada F'(x). A este proceso se le llama **integración**. Aquí se ve que la integración es un procedimiento inverso al de la derivación.

Para indicar la integración se usa el símbolo $\int$ que tiene la forma de una S alargada para recordar la palabra SUMA, como se verá en otra guía.

Resolver una ecuación diferencial es, pues, buscar la función de donde proviene una derivada conocida y para indicar la operación se escribe el símbolo de integración a los dos lados de la igualdad. Por ejemplo, para resolver la ecuación diferencial $dy = f'(x)dx$, indicamos la operación así: $\int dy = \int f'(x)dx$, colocando el símbolo $\int$ a los dos lados de la ecuación (se lee "integral de diferencial de y es igual a integral de f'(x) diferencial de x"). La expresión que acompaña a cada diferencial es el integrando (una derivada). El integrando a la izquierda es 1 y a la derecha es $f'(x)$; el elemento diferencial indica respecto de cuál variable se debe realizar la integración. Por la experiencia con derivadas, se concluye que la solución de la ecuación diferencial propuesta es $Y = f(x) + C$. Este resultado es la integral indefinida porque la constante de integración C puede tomar cualquier valor real. Igualmente, se puede afirmar que $f(x) + C$ es una primitiva de $f'(x)$. A veces es preciso calcular la constante C y para ello deben darse ciertas condiciones que debe cumplir la función.

Por ejemplo, si $\frac{dy}{dx} = 4x^3$ entonces al separar variables queda $dy = 4x^3\,dx$; para resolver la ecuación diferencial indicamos la integración a los dos lados: $\int 1dy = \int 4x^3dx$, o sea que debemos hallar, por la izquierda, una función cuya derivada respecto de y sea igual a 1, y por la derecha, una función que al derivarla respecto de x sea igual $4x^3$. Por nuestro conocimiento de derivadas podemos asegurar que se trata de la función $y = x^4 + C$, puesto que la derivada de una constante es 0. Si se desea calcular el valor de C, cuando la gráfica de la función pasa por el punto (-1, 2), por ejemplo, sustituimos esta pareja y despejamos C, así: $2 = (-1)^4 + C \rightarrow 2 - 1 \rightarrow C = 1$. En consecuencia, la función particular es $y = x^4 + 1$.

Si se grafican varias funciones que sólo difieren en una constante, el resultado es un conjunto de curvas que pertenecen a una misma familia, como se ve en la siguiente figura en donde se han representado las funciones $Y = X^2$, $Y = X^2 + 3$ y $Y = X^2 - 2$.



Obsérvese que al dibujar la curva integral $y = x^2$ (que corresponde a c=0), cualquiera otra curva integral $y = F(x) + C$ se obtiene de la ya dibujada sin más que darle una traslación de magnitud C paralelamente al eje y. Resulta así un haz de curvas paralelas, como se ve en la gráfica precedente. $y = F(x) + C$

Las integrales inmediatas

Para calcular la derivada de una función respecto de una variable se utilizan fórmulas especiales y, sin importar la complejidad de la función, siempre se podrá acomodar a uno de los modelos de diferenciación. Sin embargo, en la integración, si se exceptúan las funciones más comunes, no existe un método patrón que nos permita resolver cualquier integral y, en muchos casos, la intuición juega un papel definitivo.

Las integrales inmediatas resultan de devolver algunas fórmulas de derivación. Las más usuales son:

1. $\int du = \int 1*du = U + C$ (la integral de la diferencial de una variable es la variable más una constante).
2. $\int kUdx = k\int Udx$ (la integral de una constante por una variable es igual a la constante por la integral de la variable, siendo U = F(x)).
3. $\int (A+B)du = \int Adu + \int Bdu$ (la integral de una suma es igual a la suma de las integrales de los sumandos).
4. $\int U^n du = \dfrac{U^{n+1}}{n+1} + C$ (Si $n \neq -1$, la integral de una potencia de base simple es igual a la base elevada a la n+1 y dividida entre n+1).
5. $\int \dfrac{du}{U} = \int U^{-1} du = \ln|U| + C$ (La integral de $\int U^{-1}$, siendo U una base simple, es igual a logaritmo natural de valor absoluto de U, más una constante C).
6. $\int SenUdu = -CosU + C$ (La integral de SenU es igual a -CosU, más una constante).
7. $\int CosUdu = SenU + C$ (La integral de SenU es igual a CosU, más una constante).
8. $\int Sec^2Udu = TanU + C$ (La integral de Sec^2U es igual a tanU, más una constante).
9. $\int Csc^2Udu = -CotU + C$ (La integral de Csc^2U es igual a -CotU, más una constante).
10. $\int SecUTanUdu = SecU + C$ (La integral de SecU*TanU es igual a SecU, más una constante).
11. $\int CscUCotUdu = -CotU + C$ (La integral de CscU*CotU es igual a -CscU, más una constante).
12. $\int b^x dx = \dfrac{b^x}{1nb} + C$ (La integral de la función exponencial es igual a la exponencial, dividida entre el logaritmo natural de la base).

Para afianzar conceptos, desarrollemos los siguientes ejercicios:

1) Para la función $y = X^3 + X - 4$, hallar dy.

Solución: $\dfrac{dy}{dx} = 2x^3 + 1$; luego $dy = (2x^3 + 1)dx$

2) Para la función $y = Tan^2 x$, calcular dy

Solución: $\dfrac{dy}{dx} = 2TanxSec^2x$; luego $dy = TanxSec^2xdx$

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales, utilizando las fórmulas adecuadas:

1. $\dfrac{dy}{dx} = x^2 + 1$

$dy = (x^2 + 1)\,dx$ (Separando variables)

$\int dy = \int (x^2 + 1)dx$ (Indicando la integración a los dos lados)

$\int 1dy = \int x^2dx + \int 1dx$ (Por la derecha se tiene la integral de una suma)

$y = \dfrac{x^{2+1}}{2+1} + X + C$ (Integral de dy y dx y la integral de una potencia de base simple)

$Y = \dfrac{X^3}{3} + X + C$ (Porque $C_1 + C_2 = C$, pues una suma de constantes es otra constante)

2. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x^2} + x, x > 0$

$dy = \left(\dfrac{1}{x^2} + x\right)dx$ (Separando variables)

$dy = (x^{-2} + x)\,dx$ (Pasando x al numerador)

$\int dy = \int (x^{-2} + x)\,dx$ (Se indica la integración a los dos lados)

$\int 1dy = \int x^{-2}dx + \int xdx$ (A la derecha se tiene la integral de una suma y cada sumando es una potencia de base simple).

$$y=\frac{x^{-1}}{-1}+\frac{x^{2}}{2}+C \Rightarrow y=-\frac{1}{x}+\frac{x^{2}}{2}+C$$ (Reescribiendo para evitar el exponente negativo)

3. $$\frac{dy}{dx}=3X^{2}+X^{\frac{1}{2}}+\frac{2}{X}-4$$

$$dy=(3x^{2}+x^{\frac{1}{2}}+2x^{-1}-4)dx$$ (Separando variables)

$$\int dy=\int(3x^{2}+x^{\frac{1}{2}}+2x^{-1}-4)dx$$ (Indicando la integración a los dos lados)

$$\int dy=\int 3x^{2}dx+\int x^{\frac{1}{2}}dx+\int 2x^{-1}dx-\int 4dx$$ (Integral de una suma)

$$y=3\int x^{2}dx+\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+2\int x^{-1}dx-4\int dx$$ (Constante por variable, potencia de base simple, constante por variable, constante por diferencial)

$$y=3\left(\frac{x^{3}}{3}\right)+\frac{2}{3}\left(x^{\frac{3}{2}}\right)+2\ln|x|-4x+C$$ (Potencia de base simple, 1 sobre variable a la 1, elemento diferencial)

$$y=x^{3}+\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}+2\ln|x|-4x+C$$ (Simplificando)

4. $$\frac{dy}{dx}=2CosX-SenX$$

$dy=(2CosX-SenX)dx$ (Separando variables)

$\int dy=\int(2CosX-SenX)dx$ (Indicando la integración a los dos lados)

$\int dy=\int 2CosXdx-\int SenXdx$ (Integral de una suma)

$y=2\int Coxdx-\int SenX$ (Constante por variable)

$y=2SenX-(-CosX)+C$ (La integral de CosX es SenX y la de senX es - CosX)

$y=2SenX+CosX+C$ (Destruyendo el paréntesis)

5. $$\frac{dy}{dx}=\sqrt{x}+\frac{2}{\sqrt[3]{x}}-\frac{3}{x^{3}}$$

$$dy=\left(\sqrt{x}+\frac{2}{\sqrt[3]{x}}-\frac{3}{x^{3}}\right)dx$$ (Separando variables)

$$dy=\left(x^{\frac{1}{2}}+\frac{2}{x^{\frac{1}{3}}}-\frac{3}{x^{3}}\right)dx$$ (Escribiendo sin radicales)

$$dy=\left(x^{\frac{1}{2}}+2x^{-\frac{1}{3}}-3x^{-3}\right)dx$$ (Escribiendo sin denominadores)

$$\int dy=\int\left(x^{\frac{1}{2}}+2x^{-\frac{1}{3}}-3x^{-3}\right)dx$$ (Indicando la integración a los dos lados)

$$\int dy=\int x^{\frac{1}{2}}dx+\int 2x^{-\frac{1}{3}}dx-\int 3x^{-3}dx$$ (Integral de una suma)

$$y=\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+2\left(\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}\right)-3\left(\frac{x^{-2}}{-2}\right)+c$$ (Integral de constante por variable y potencia de base simple)

$$y=\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}+3x^{\frac{2}{3}}+\frac{3}{2x^{2}}+C$$ (Operando y escribiendo sin exponente negativo)

6) $$\frac{dy}{dx}=\frac{x}{y}$$

$ydy=xdx$ (Separando variables)

$\int y\,dy=\int xdx$ (Indicando la integración a los dos lados).

$$\frac{y^{2}}{2}=\frac{x^{2}}{2}+C$$ (Potencias de base simple)

$y^2 = x^2 + 2c \Rightarrow y = +\sqrt{x^2 + C}$ (Eliminando denominadores; despejando y)

7) Hallar la ecuación de la familia de curvas cuya pendiente en un punto dado sea igual y de sentido contrario al duplo de la abscisa en dicho punto. De esa familia, hallar la curva que pasa por el punto (1, -2).

$\frac{dy}{dx} = -2x$ (De acuerdo al enunciado)

$dy = -2xdx$ (Separando variables)

$\int dy = \int -2xdx$ (Indicando la integración a los dos lados)

$y = -2\left(\frac{x^2}{2}\right) + C = -x^2 + C$ (Integrando a los dos lados y simplificando)

Esta es la ecuación de una familia de curvas.

Si se reemplaza por las coordenadas del punto (1,-2), resulta:

$-2 = -(1)^2 + C \Rightarrow C = -2 + 1 = -1$. Luego la curva que pasa por (1, -2) es $y = -x^2 - 1$

8) Como aplicación de la integral indefinida en la física, hallar las leyes que rigen el movimiento de un punto que se mueve en línea recta con aceleración constante.

Solución: en guía anterior se vio que la aceleración "a", que es constante según el enunciado, es la derivada de la velocidad respecto del tiempo, es decir:

$\frac{dv}{dt} = a \Rightarrow dv = adt$. Si se resuelve la ecuación diferencial, queda:

$\int dv = \int adt \Rightarrow v = a\int dt \Rightarrow v = at + C$. Para hallar C supongamos que la velocidad inicial es V_0, es decir, $V = V_0$ cuando $t = 0$. Luego, $V_0 = a(0) + C \Rightarrow C = V_0$. Y reemplazando en la ecuación de la velocidad, $V = at + V_0$ (1)

Además, la velocidad V es igual a la derivada del espacio S con respecto del tiempo t, o sea: $\frac{ds}{dt} = V = at + V_0$. De donde, $ds = (at + V_0)dt$. Si se resuelve la ecuación diferencial, resulta: $\int ds = \int (at + V_0)dt \Rightarrow S = \frac{at^2}{2} + V_0 t + C$.

Para determinar C, supongamos que la distancia inicial es S_0, es decir, $S = S_0$ cuando t = 0. Luego: $S_0 = \frac{a(0)^2}{2} + V_0(0) + C \Rightarrow C = S_0$.

Por tanto, $S = \frac{at^2}{2} + V_0 t + S_0$ (2)

Finalmente, si la aceleración es la de la gravedad y el espacio es la altura h, resultan las leyes que rigen el movimiento de un cuerpo que cae en el vacío, partiendo del reposo, así: $V = gt$ y $h = \frac{gt^2}{2}$. Si despejamos t en la primera de estas ecuaciones y la sustituimos en la segunda, se tiene: $t = \frac{V}{g}$, luego: $h = \frac{g}{2}\left(\frac{V}{g}\right)^2 = \frac{gV^2}{2g^2} = \frac{V^2}{2g}$.

Despejando: $V = \sqrt{2gh}$.

Hemos realizado un trabajo en el cual pudimos interactuar y reconocer algunos valores durante el desempeño. Destaquemos de cada integrante los tres valores más sobresalientes.

Establezcamos los cinco valores que consideremos más importantes y que debiera tener un trabajador que fuéramos a seleccionar para nuestra empresa.

De acuerdo con los conceptos expuestos y los ejercicios resueltos en la sección B, desarrollamos por parejas las siguientes cuestiones. Al concluir los ejercicios los socializamos con nuestro profesor.

1. Resolvemos las siguientes ecuaciones diferenciales usando las integrales adecuadas.

a. $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 2x + 5$

b. $\frac{dy}{dx} = \sqrt{xy}, x > 0, y > 0$

c. $\frac{dy}{dx} = 2xy^2, y > 0$

d. $\frac{ds}{dt} = 3t^2 + 4t - 6$

2. En los siguientes ejercicios se ha omitido el miembro izquierdo de la ecuación diferencial, situación que es común en el cálculo integral. Usando las fórmulas que convengan, calculamos las siguientes integrales indefinidas.

a. $\int x^5 dx =$

b. $\int (4x^3 + 3x^2 + 2x - 5)dx =$

c. $\int \frac{dx}{x_2} =$

d. $\int (1 - x)\sqrt{x}dx =$

e. $\int \frac{x^3 + 5x^2 - 4}{x^2} dx =$

f. $\int x^{2/3} dx =$

g. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} dx =$

h. $\int (2CosX + 3SenX)dx =$

i. $\int (2x^3 - 5x^2 - 3x + 4)dx =$

j. $\int (x + 3)^2 dx =$

k. $\int (x^{3/2} - 2x^{2/3} + 5\sqrt{x} - 3)dx =$

l. $\int \frac{4x^2 - 2\sqrt{x}}{x} dx =$

m. $\int \sqrt{x}(3x - 2)dx =$

3. Hallamos la ecuación particular de una función cuando se conocen su derivada y un punto de la misma.

a. $\frac{dy}{dx} = 2x + 3$, si pasa por P(-2,4)

b. $\frac{dy}{dx} = 3x^2$, sabiendo que pasa por A(1,1)

c. $\frac{dy}{dx} = x^2 + 3x + 2$, si pasa por B(-3, -3/2)

Como aplicación práctica de la integral indefinida leo y analizo la siguiente información y resuelvo el siguiente planteamiento, cuyos resultados deben de alertarnos sobre los peligros que conllevan las altas velocidades, quizá mezcladas con licor o con drogas, al conducir un vehículo.

Las siguientes normas del Código de Tránsito de Colombia reglamentan la velocidad de los automotores, así:

Artículo 106°. Límites de velocidad en zonas urbanas. En vías urbanas las velocidades máximas serán de sesenta (60) kilómetros por hora, excepto cuando las autoridades competentes por medio de señales indiquen velocidades distintas.

Artículo 107°. Límites de velocidad en zonas rurales. La velocidad máxima permitida en zonas rurales será de ochenta (80) Kilómetros por hora.
Parágrafo. De acuerdo con las características de operación de la vía y las clases de vehículos, las autoridades de tránsito competentes determinarán la correspondiente señalización y las velocidades máximas y mínimas permitidas.

Conducir un vehículo a velocidad superior a la máxima permitida acarrea, de acuerdo con el Ministerio del Transporte, una sanción pecuniaria de 15 SMLDV (Salarios Mínimos Legales Diarios vigentes), que para el año 2005 es de aproximadamente $195000.

Las marcas de frenado (derrape) de los neumáticos de un automóvil indican que se han aplicado los frenos 50 metros antes de detenerse. Si el automóvil tiene una desaceleración constante de $5\frac{metros}{Segundo^2}$, ¿a qué velocidad (en kilómetros por hora) viajaba el auto cuando se empezó a frenar? (para la solución, guíese por el problema 8 de la sección B).

El conductor, ¿merece ser sancionado con la multa estipulada? Justifique su respuesta, comparta con sus compañeros y con el profesor para tratar de fomentar buenos hábitos cuando se conduce un vehículo.

Haga un análisis AXIOLÓGICO del anterior ejercicio, según su resultado. Igualmente, emita un juicio sobre lo que podría ocurrirle al mismo individuo, desde el punto de vista laboral.

ESTUDIO Y ADAPTACIÓN DE LA GUÍA

Guía 2

MÉTODOS DE INTEGRACIÓN POR SUSTITUCIÓN Y POR PARTES

En las condiciones económicas actuales, una alternativa a la crisis del desempleo puede ser la actividad piscícola, si se dispone del espacio y las condiciones suficientes. El cálculo integral nos suministra modelos matemáticos que permiten hacer un seguimiento más racional a un criadero de peces, por ejemplo.

INDICADORES DE LOGRO

- Realiza de manera correcta el cambio de variable para poder aplicar el método de sustitución
- Integra algunas potencias de base compuesta y ciertos productos y cocientes por el método de sustitución
- Selecciona correctamente los elementos U y dv, base de la integración por partes
- Desarrolla, mediante ensayo y error, integrales que se resuelven mediante el método de integración por partes

- Hace uso racional de los recursos naturales **(RESPONSABILIDAD AMBIENTAL)**
- Mantiene ordenado su sitio de trabajo
- Participa activamente en los proyectos de mejoramiento ambiental que permiten su vinculación
- Demuestra actitud positiva hacia los problemas que afectan el medio ambiente
- Reconoce y analiza diferentes problemas del medio ambiente

Leemos e interpretamos en subgrupo lo siguiente:

En esta guía, y debido a la vital importancia que tiene la protección y conservación del medio ambiente para la supervivencia y desarrollo sostenible de la humanidad, volveremos a considerar la **C.L.G. RESPONSABILIDAD AMBIENTAL.** Centraremos nuestra atención en un documento de las Naciones Unidas, llamado “LA CARTA DE LA TIERRA”, que empieza a gestarse en 1987 cuando la Comisión Mundial para el Ambiente y Desarrollo de las Naciones Unidas hizo un llamado para la creación de una carta que tuviera los principios fundamentales para el desarrollo sostenible. La redacción de la Carta de la Tierra fue uno de los asuntos inconclusos de la Cumbre de la Tierra de Río en 1992. En 1994 Maurice Strong, Secretario General de la Cumbre de la Tierra y Presidente del Consejo de la Tierra y Mikhail Gorbachov, Presidente de Cruz Verde Internacional, lanzaron una nueva iniciativa de la Carta de la Tierra con el apoyo del Gobierno de los Países Bajos (Holanda y Bélgica). A principios de 1997 la Comisión de la Carta de la Tierra formó un comité redactor internacional, quien ayudó a conducir el proceso internacional de consulta. La evolución y desarrollo del documento refleja el proceso de un diálogo mundial acerca de la Carta de la Tierra. Se comenzó con el Borrador de Referencia el cual fue editado por la Comisión y puesto en circulación internacional como parte del proceso de consulta. La versión final de la Carta fue aprobada por la Comisión en la reunión celebrada en las oficinas centrales de UNESCO en París en marzo del 2000. El documento completo se encuentra en Internet.

A

Leo, analizo y comparto con un compañero lo siguiente. Si necesito escribir lo hago en mi cuaderno de matemáticas.

1. Considere la expresión $x^2(1-x^3)^4dx$. Haga U=1 - X^3; calcule $\frac{dU}{dx}$; ahora despeje dx; finalmente, reemplace lo que se pueda en la primera expresión y simplifique el resultado.

2. Calcule $\frac{d(uv)}{dx}$ (la derivada de un producto), siendo U y V funciones de x. Ahora multiplique los dos miembros de la igualdad por dx y simplifique el resultado; luego despeje Udv.

3. Elabore una lista de actividades que, según su criterio, atentan contra el medio ambiente en su entorno.

B

Leo, interpreto y anoto en mi cuaderno de matemáticas los conceptos que aparecen en el recuadro verde y si es preciso, vuelvo a resolver los ejemplos para mecanizar los métodos.

Como se anotaba en la guía anterior, la dificultad del cálculo diferencial radica en que no existen modelos que permitan desarrollar cualquier integral. Los métodos de integración permiten reducir en gran medida, esta dificultad, transformando las integrales complejas en formas conocidas.

INTEGRACIÓN POR SUSTITUCIÓN

Lo que acabo de hacer en la parte 1 del paso A es la base del método de integración por sustitución o cambio de variable que, básicamente, consiste en transformar la integral en otra que tenga la forma de una de las integrales inmediatas. Permite integrar algunos productos y cocientes y el éxito en su aplicación depende de la elección que se haga de U. El proceso es el siguiente: se escoge U, se halla $\frac{du}{dx}$, se despeja dx y por último se reemplaza lo que se pueda en la integral dada; al simplificar, debe de aparecer una integral inmediata que debe resolverse, para luego deshacer la sustitución inicial. Ejemplos:

a) $\int X^2(1-X^3)^4dx$

Sol: $U=1-x^3 \Rightarrow \frac{du}{dx}=-3x^2 \Rightarrow dx - \frac{du}{3x^3}$ (Eligiendo U, derivando y despejando dx). Si se reemplaza en la integral planteada, queda: $\int x^2U^4\left(-\frac{du}{3x^2}\right)=\int -\frac{U^4du}{3}$ (Al sustituir lo que sea posible y simplificar, resulta una integral inmediata que se resuelve). Luego: $\int X^2(1-X^3)^4 = \int -\frac{1}{3}U^4du = -\frac{1}{3}\frac{U^5}{5}+C$. Si devolvemos la sustitución, queda: $\int x^2(1-x^3)^4dx = -\frac{(1-x^3)^5}{15}+C$, que es la solución, como puede comprobarse hallando la derivada: deberá obtenerse el integrando.

b) $\int Y^3\sqrt{1+Y^4}dy$

Sol: sea $U=1+y^4 \Rightarrow \frac{du}{dy}=4y^3 \Rightarrow dy=\frac{du}{4y^3}$. Reemplazando, se tiene:

$\int y^3\sqrt{1+y^4}dy = \int y^3U^{\frac{1}{2}}\frac{du}{4y^3} = \int\frac{U^{\frac{1}{2}}}{4}du = \frac{1}{4}\frac{U^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C$. Simplificando y reemplazando U,

resulta: $\int y^3\sqrt{1+y^4}dy = \frac{1}{6}(1+y^4)^{\frac{3}{2}}+C$

c) $\int\frac{dx}{(2-X)^3}$

Sol: Si $U=2-x \Rightarrow \frac{du}{dx}=-1\Rightarrow dx=-du$. Si se reemplaza:

$\int\frac{dx}{(2-x)^3}=\int\frac{-du}{U^3}=\int -U^{-3}du = -\frac{U^{-2}}{-2}+C=\frac{1}{2U^2}+C$. Si reemplazamos U:

$\int\frac{dx}{(2-x)^3}=\frac{1}{2(2-x)^2}+C$

d) $\int 2Xe^{x^2}dx$

Sol: Si $U=x^2\Rightarrow\frac{du}{dx}=2x\Rightarrow dx=\frac{du}{2x}$. Reemplazando:

$\int 2Xe^{x^2}dx=\int 2Xe^u\frac{du}{2x}=\int e^udu=e^u+C$. Si de nuevo se reemplaza:

$\int 2Xe^{x^2}dx=e^{x^2}+C$, como puede comprobarse.

e) $\int e^{Seno} Cosxdx$

Sol: $SiU = Senx \Rightarrow \frac{du}{dx} = Cosx \Rightarrow dx = \frac{du}{Cosx}$. Reemplazando, queda:

$\int e^{Senx} Cosxdx = \int e^u Cosx(\frac{du}{Cosx}) = \int e^u du = e^u + C$. Luego:

$\int e^{Senx} Cosxdx = e^{Senx} + C$

f) $\int \frac{\ln^3 x}{x} dx$

Sol: $U = \ln x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow dx = xdu$. Reemplazando, resulta:

$\int \frac{\ln^3 x}{x} dx = \Rightarrow \int \frac{U^3}{x} xdu = \int U^3 du = \frac{U^4}{4} + C$. Reemplazando, da:

$\int \frac{\ln^3 xdx}{x} = \frac{(\ln x)^4}{4} + C = \frac{\ln^4 x}{4} + C$

g) $\int Sen2xdx$

Solución: $SeaU = 2X \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2 \Rightarrow dx = \frac{du}{2}$. Reemplazando, resulta:

$$\int Sen2xdx = \int SenU\left(\frac{du}{2}\right) = -\frac{1}{2} CosU + C = -\frac{Cos2x}{2} + C$$

INTEGRACIÓN POR PARTES

Lo que realizado en la parte 2 del paso A es la base del método de integración por partes. En efecto, $\frac{d(U*V)}{dx} = U\frac{dv}{dx} + V\frac{du}{dx} \Rightarrow d(UV) = Udv + Vdu$. Luego:

$\int d(UV) = \int Uvd + \int Vdu$. Como la integral de d(UV)=UV, entonces. Y despejando una de las integrales, resulta: $\int Udv = UV - \int Vdu$.

En el método de integración por partes se recomienda seleccionar U y dv de tal manera que dv sea una expresión fácilmente integrable, pues de no ser así el problema se complica aún más. Se calcula $\frac{dU}{dx}$ y se despeja dU; a partir de dV se calcula V por integración. Luego se reemplaza en la expresión original y se verifica que $\int Vdu$ se pueda integrar de acuerdo con los métodos disponibles.

En ocasiones, la integral planteada aparece en varios términos de la igualdad, caso en el cual se reúnen los términos que contienen la integral pedida, para luego despejarla. También suele ocurrir que el método de integración por partes debe reiterarse.

Ejemplos:

a) $\int XSenxdx$

Sol: Para resolver por partes debe acomodarse a la forma general: $\int Udv = UV - \int Vdu$

$SeaU = x \Rightarrow \frac{du}{dx} = 1 \Rightarrow dx = du$ y $Seadx = Senxdx \Rightarrow \int dv = \int Senxdx \Rightarrow V = -Cosx$.

Si se reemplaza, queda:

$Udv = x(-Cosx) - \int -Cosxdx = -xCosx + \int Cosxdx = -xCosx + Senx + C$.

Luego $\int xSenxdx = -xCosx + Senx + C$, como puede comprobar derivando para obtener el integrando.

b) $\int xe^{3x} dx$

Solución: se necesita la forma general $\int Udv = UV - \int Vdu$

$SeaU = X \Rightarrow \frac{du}{dx} = 1 \Rightarrow dx = du$

$Seadv = e^{3x} dx \Rightarrow \int dv = \int e^{3x} dx$. Esta integral se resuelve por sustitución, así:

$SeaM = 3x \Rightarrow \frac{dM}{dx} = 3 \Rightarrow dx = \frac{dM}{3}$. Reemplazando en la anterior, queda:

$V = \int e^{3x} dx = \int e^M \frac{dM}{3} = \frac{e^M}{3} + C = \frac{e^{3x}}{3} + C$. Reemplazando en la primera:

$\int Xe^{3x}dx = \int Udv = X\left(\frac{e^{3x}}{3}\right) - \int \frac{e^{3x}}{3}dx$, $\int Xe^{3x}dx = \frac{Xe^{3x}}{3} - \frac{e^{3x}}{9} + C$ que se puede comprobar hallando la derivada de esta primitiva.

c) $\int e^x Cosxdx$

Solución: se necesita la forma general $\int Udv = UV - \int Vdu$.

$SeanU = s^x \Rightarrow du = e^x dx$ y $dv = Cosxdx \Rightarrow V = Senx$.

Luego: $\int e^x Cosxdx = e^x SenX - \int e^x Senxdx$ (1). La última integral también se realiza por partes, así: Hacemos $U = e^x \Rightarrow du = e^x dx$ y $dv = Senxdx \Rightarrow V = -Cosx$. Si se reemplaza, se tiene:

$\int e^x Senx = e^x(-Cosx) - \int -Cosx(e^x)dx = -e^x Cosx + \int e^x Cosxdx$

Si se reemplaza en (1), queda: $\int e^x Cosxdx = e^x Senx - (e^x Cosx + \int e^x Cosxdx) \Rightarrow$

$\int e^x Cosxdx = e^x Senx + e^x Cosx - \int e^x Cosxdx)$, en donde se ve que el integral planteado aparece también al lado derecho de la igualdad.

Luego: $2\int e^x Cosxdx = e^x Senx + e^x Cosx \Rightarrow \int e^x Cosx = \frac{e^x Senx + e^x Cosx}{2} + C$

resultado que puede verificarse por derivación de la función.

d) $\int x^2 Senxdx$

Solución: usamos la forma general $\int Udv = UV - \int Vdu$ de la integración por partes.

Aquí $U = X^2 \rightarrow dU = 2Xdx$, y $dv = SenX \rightarrow V = -CosX$. Luego:

$\int X^2 SenXdx = -X^2 CosX + 2\int XCosXdx$. Ahora, en $\int XCosXdx = UV - \int Udu$,

se reitera el método: $U = X \rightarrow du = dx$ y $dv = CosX \rightarrow V = SenX$. Luego:
$\int XCosXdx = XSenX - \int SenXdx = XSenX + CosX$. Y remplazando:

$\int X^2 SenXdx = -X^2 CosX + 2\int XCosXdx = -X^2 CosX + 2(XSenX + CosX) + C$, que se puede comprobar derivando este resultado.

e) $\int \ln x dx$

Solución: se integra por partes de acuerdo con $\int Udv = UV - \int Vdu$

$SeanU = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x}$ y $dv = dx \Rightarrow V = x$. Luego:

$\int \ln x dx = x\ln x - \int x\left(\frac{dx}{x}\right) = x\ln x - x + C$, como se puede verificar por derivación de la función.

f) Una ecuación diferencial como $\frac{dP}{dt} = kP^n$ se utiliza frecuentemente como modelo matemático que permite hallar aproximadamente el crecimiento (o decrecimiento) de una población P(t) de individuos en un instante t. El valor de la constante K debe determinarse generalmente por medio de experimentación, en tanto que n indica la forma en que cambia la población; en caso de que las tasas de natalidad y de mortalidad sean constantes, el valor de n es 1 y el modelo se convierte en $\frac{dP}{dt} = kP$. Usando estas consideraciones se aplica la integración para resolver situaciones como las siguientes:

1) Se sabe que cierta población se comporta de acuerdo con el modelo matemático $\frac{dP}{dt} = k\sqrt{P}$. Cuando $t = 0 y P = P_0$; calcular $P(t)$.

Solución: *si* $\frac{dP}{dt} = k\sqrt{P} \Rightarrow \frac{dP}{\sqrt{P}} = kdt \Rightarrow P^{2dP} = kdt$ (Separando variables).

$\int P^{-\frac{1}{2}}dP = \int kdt \Rightarrow \frac{P^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = kt + C \Rightarrow 2\sqrt{P} = kt + C$ (Resolviendo la ecuación diferencial).

$2\sqrt{P_0} = k(0) + C \Rightarrow C = 2\sqrt{P_0}$ (Reemplazando de acuerdo a la condición).

Luego: $2\sqrt{P} = kt + 2\sqrt{P_0} \Rightarrow \sqrt{P} = \frac{kt}{2} + \sqrt{P_0} \Rightarrow P = \left(\frac{kt}{2} + \sqrt{P_0}\right)^2$ y por lo tanto

$P(t) = \left(\frac{kt}{2} + \sqrt{P_0}\right)^2$.

2) Ahora supongamos que la población de su municipio satisface la ecuación diferencial dada en 1); en 1990 tenía 60000 habitantes y en el 2000 tenía 72000. Si el ritmo de crecimiento poblacional se mantiene, ¿dentro de cuántos años la población será de 100000 habitantes?

Solución: en 1990, t=0 y P_0 = 60000. Cuando t = 10 años, la población es de 72000 y si se reemplaza en =(1), se tiene:

$72000 = \left(\frac{k*10}{2} + \sqrt{60000}\right)^2 \Rightarrow 72000 = \left(5k + \sqrt{60000}\right)^2$. Si se saca raíz cuadrada, resulta: $\sqrt{72000} = 5k + \sqrt{60000} \Rightarrow k = \frac{\sqrt{72000} - \sqrt{60000}}{5}$. Luego: k=4.676, aproximadamente. Finalmente, hacemos P(t) = 100000 y reemplazamos:

$1000 = \left(\frac{4.776*t}{2} + \sqrt{60000}\right)^2$. Si se saca raíz cuadrada:

$$\sqrt{100000} = 2.338t + \sqrt{60000} \Rightarrow t = \frac{\sqrt{100000} - \sqrt{60000}}{2.338} = 30.49 .$$

Luego la población será de 100000 habitantes dentro de 30 años y medio aproximadamente.

Las suposiciones hechas en algunos de los ejercicios propuestos deben cuestionarnos en cuanto a la responsabilidad que tenemos en el crecimiento desmesurado de la población, en la utilización indiscriminada de los recursos naturales disponibles y en los atentados que, muchas veces inconscientemente, hacemos contra la naturaleza.

Con el ánimo de que todos nos preocupemos por buscar soluciones que remedien la situación, se presentan los principios que rigen La Carta de la Tierra que se mencionó al principio de la guía. Vamos a leerlos y a comentarlos brevemente.

PRINCIPIOS

I. Respeto y cuidado de la comunidad de la vida

1. Respetar la Tierra y la vida en toda su diversidad

   a. Reconocer que todos los seres son interdependientes y que toda forma de vida, independientemente de su utilidad, tiene valor para los seres humanos.

   b. Afirmar la fe en la dignidad inherente a todos los seres humanos y en el potencial intelectual, artístico, ético y espiritual de la humanidad.

2. Cuidar la comunidad de la vida con entendimiento, compasión y amor.

   a. Aceptar que el derecho a poseer, administrar y utilizar los recursos naturales conduce hacia el deber de prevenir daños ambientales y proteger los derechos de las personas.

   b. Afirmar que a mayor libertad, conocimiento y poder, se presenta una correspondiente responsabilidad por promover el bien común.

3. Construir sociedades democráticas que sean justas, participativas, sostenibles y pacíficas

   a. Reconocer que la libertad de acción de cada generación se encuentra condicionada por las necesidades de las generaciones futuras.

   b. Promover la justicia social y económica, posibilitando que todos alcancen un modo de vida seguro y digno, pero ecológicamente responsable.

4. Asegurar que los frutos y la belleza de la Tierra se preserven para las generaciones presentes y futuras.

   a. Reconocer que la libertad de acción de cada generación se encuentra condicionada por las necesidades de las generaciones futuras.

   b. Transmitir a las futuras generaciones valores, tradiciones e instituciones, que apoyen la prosperidad a largo plazo, de las comunidades humanas y ecológicas de la Tierra.

II. Integridad ecológica

1. Proteger y restaurar la integridad de los sistemas ecológicos de la Tierra, con especial preocupación por la diversidad biológica y los procesos naturales que sustentan la vida.

   a. Adoptar, a todo nivel, planes de desarrollo sostenible y regulaciones que permitan incluir la conservación y la rehabilitación ambientales, como parte integral de todas las iniciativas de desarrollo.

b. Establecer y salvaguardar reservas viables para la naturaleza y la biosfera, incluyendo tierras silvestres y áreas marinas, de modo que tiendan a proteger los sistemas de soporte a la vida de la Tierra, para mantener la biodiversidad y preservar nuestra herencia natural.

c. Promover la recuperación de especies y ecosistemas en peligro.

d. Manejar el uso de recursos renovables como el agua, la tierra, los productos forestales y la vida marina, de manera que no se excedan las posibilidades de regeneración y se proteja la salud de los ecosistemas.

e. Manejar la extracción y el uso de los recursos no renovables, tales como minerales y combustibles fósiles, de forma que se minimice su agotamiento y no se causen serios daños ambientales.

2. Evitar dañar como el mejor método de protección ambiental y cuando el conocimiento sea limitado, proceder con precaución.

   a. Tomar medidas para evitar la posibilidad de daños ambientales graves o irreversibles, aun cuando el conocimiento científico sea incompleto o inconcluso.

   b. Imponer las pruebas respectivas y hacer que las partes responsables asuman las consecuencias de reparar el daño ambiental, principalmente para quienes argumenten que una actividad propuesta no causará ningún daño significativo.

   c. Prevenir la contaminación de cualquier parte del medio ambiente y no permitir la acumulación de sustancias radioactivas, tóxicas u otras sustancias peligrosas.

3. Adoptar patrones de producción, consumo y reproducción que salvaguarden las capacidades regenerativas de la Tierra, los derechos humanos y el bienestar comunitario.

   a. Reducir, reutilizar y reciclar los materiales usados en los sistemas de producción y consumo y asegurar que los desechos residuales puedan ser asimilados por los sistemas ecológicos.

   b. Actuar con moderación y eficiencia al utilizar energía y tratar de depender cada vez más de los recursos de energía renovables, tales como la solar y eólica.

   c. Promover el desarrollo, la adopción y la transferencia equitativa de tecnologías ambientalmente sanas.

   d. Asegurar el acceso universal al cuidado de la salud que fomente la salud reproductiva y la reproducción responsable.

Como en la integración no existen modelos que se ajusten a la solución de las diversas clases de integrales, es preciso ejercitar bastante para adquirir destreza en los diversos métodos. Por tanto, utilizando el método adecuado, y guiándome por lo expuesto en la sección B, desarrollo lo siguiente:

1. $\int (x^3+2)^2 3x^2 dx$

2. $\int (x^3+2)^{\frac{1}{2}} x^2 dx$

3. $\int \frac{x^2}{\sqrt[4]{x^3+2}} dx$

4. $\int 3x\sqrt{1-2x^2}\, dx$

5. $\int \frac{x+3}{\left(x^2+6x\right)^{\frac{1}{3}}} dx$

6. $\int x\sqrt[3]{1-x^2}\, dx$

7. $\int \sqrt{x^2-2x^4}\, dx$

8. $\int \frac{x}{x^2-1} dx$

9. $\int Sen\frac{x}{2} dx$

10. $\int Cos\,3xdx$

11. $\int Sen^2 xCosxdx$

12. $\int \tan xdx$

13. $\int Secxdx$ (Primero se multiplican, tanto numerador como denominador por Secx + tan x).

14. $\int Sec^2 2axdx$

15. $\int \frac{Senx + Cosx}{Cosx} dx$

16. $\int \frac{Senydy}{Cos^2 y}$

17. $\int (1+Tanx)^2 dx$ (Primero se desarrolla la potencia).

18. $\int e^{3Cos\,2x} Sen2xdx$

19. $\frac{dx}{1+Cosx}$

20. $\int (Tan2x + Sec2x)^2 dx$ (Primero se desarrolla la potencia).

Acorde con la lista sobre problemas ambientales solicitada en la sección A, propongo posibles soluciones y si es pertinente trato de implementarlas en asociación con otros estamentos de la comunidad educativa, el vecindario en donde resido y con mi familia.

D

Como aplicación al tema desarrollado, resuelvo la siguiente situación problemática que se me puede presentar en la vida real.

Suponga que usted es un microempresario piscícola y adecúa un estanque en el que se siembran 1000 mojarras. Si el crecimiento de la población de peces está descrita por la ecuación diferencial $\frac{dP}{dt}2k\sqrt{P+1}$:

a) Determino P(t) sabiendo que $P(0) = P_0$

b) Si después de 3 meses hay 1400 peces, cuántos habrá al final de un año?

c) Si el máximo número de mojarras que puede albergar el estanque es de 6000, ¿dentro de cuánto tiempo se alcanzará este límite?

d) Para la adecuación del estanque, ¿qué cuidados debo tener en cuenta, de tal manera que no cause perjuicios al medio ambiente?

ESTUDIO Y ADAPTACIÓN DE LA GUÍA

GUÍA 3

MÉTODO DE INTEGRACIÓN POR FRACCIONES PARCIALES E INTEGRALES DE ALGUNAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Para fechar elementos tan antiguos como los hallados en las Pirámides de Egipto, los Arqueólogos han recurrido al método del Carbono Catorce, que se basa en la ecuación diferencial $\frac{dN}{dt} = kN$, cuya solución se hace mediante el Cálculo Integral.

INDICADORES DE LOGRO

- Identifica las fracciones algebraicas propias e impropias
- Dada una fracción impropia, la expresa como la suma del cociente, más una fracción propia, mediante la división algebraica
- Establece y aplica correctamente los casos que pueden presentarse para convertir expresiones racionales en suma de fracciones parciales

- Integra expresiones racionales que pueden convertirse en sumas de fracciones parciales
- Maneja adecuadamente las principales identidades trigonométricas
- Selecciona las identidades adecuadas para transformar el integrando hasta convertirlo en una integral inmediata o en una que se pueda resolver por alguno de los métodos vistos
- Comprende, interpreta, analiza y produce diferentes tipos de textos según sus necesidades. **(COMUNICACIÓN)**
- Expresa con autonomía lo que quiere y lo que piensa en forma verbal y no verbal
- Usa un lenguaje verbal y no verbal adecuado al medio
- Demuestra respeto por los conceptos emitidos por los otros
- Reconoce la diferencia entre procesos de información y comunicación
- Identifica algunas características básicas que debe poseer la persona para el desempeño en el trabajo

Con los compañeros de subgrupo leemos, analizamos y comentamos el siguiente contenido.

En esta guía volvemos a analizar situaciones que se refieren a la **Competencia Laboral General COMUNICACIÓN,** debido a la vital importancia que tiene esta competencia en nuestro futuro, tanto en lo personal como en lo laboral, amén de facilitarnos nuestra interacción con quienes nos rodean.

El valor de la comunicación nos ayuda a intercambiar de forma efectiva pensamientos, ideas y sentimientos con las personas de nuestro entorno, en un ambiente de cordialidad y buscando el enriquecimiento personal de ambas partes.

Algunas personas tienen una conversación agradable y tienen la capacidad de comunicarse efectivamente y pueden aportar mucho con su conocimiento y experiencia, pero con la mala costumbre de no dar oportunidad a otros para expresar sus puntos de vista. Tengamos cuidado para no llegar a estos excesos.

La buena comunicación tiene algunas características como: escuchar con atención, no acaparar la palabra, evitar interrumpir, utilizar un lenguaje claro y moderado, lo cual demuestra educación y trato delicado hacia las personas. He aquí algunos elementos que mejoran nuestra comunicación:

a. Interés por la persona. Cuando una persona se acerca a nosotros es porque considera que tiene algo importante que decirnos; pongámosle toda la atención del caso, seamos corteses e intentemos hacer el momento más agradable.

b. Saber preguntar. Si al expresar las ideas se tiene dificultad para comprender el mensaje, ya sea por desconocimiento del tema, distracción, cansancio, no nos quedemos con la duda y pidamos aclaración de lo que nos parece incorrecto o equivocado para evitar situaciones incómodas que sólo dejan resentimientos.

c. Aprender a ceder. No debemos empecinarnos y llegar a pensar que tenemos la verdad revelada y en consecuencia creer de antemano que todas las personas deben plegarse a nuestros puntos de vista, y menos tratar de obligarlos a pensar como nosotros. La comunicación efectiva es comprensiva, condescendiente y conciliadora para obtener los mejores frutos y estrechar las relaciones interpersonales.

No existe medio más eficaz que la comunicación para hacer amistades, elegir a la pareja y estrechar los lazos familiares, profesionales y de amistad. Todos deseamos vivir en armonía. Por eso, este es el momento de reflexionar y decidirse a dar un nuevo rumbo hacia una mejor comunicación con quienes nos rodean.

A

Leo, analizo y resuelvo los interrogantes que a continuación se formulan para poder estudiar la integración por fracciones parciales y de algunas integrales trigonométricas. Si tengo dificultades, consulto en las fuentes adecuadas.

1) ¿Cómo se divide un polinomio entre otro? Doy ejemplos.

2) ¿Qué es factorizar? Propongo y resuelvo ejemplos en donde haya FACTOR COMÚN, DIFERENCIA DE CUADRADOS, SUMA o DIFERENCIA DE CUBOS, TRINOMIO DE SEGUNDO GRADO.

3) ¿Cómo se ejecuta la división de un polinomio P(x) entre un binomio de la forma x - a de manera sintética? Propongo y resuelvo algunos ejemplos.

4) Usando cualquier método, probar que (2, 1) es la solución del sistema simultáneo:

   (1) $4X - 11Y = -3$

   (2) $6X + 7Y = 19$

5) Descomponga Sen^3x, Sen^4x y Sen^5x en dos factores de modo que uno de los exponentes sea múltiplo de 2.

6) Exprese Tan^2x en función de $Secx$ y Cos^2x a través de $Senx$.

7) Exprese $Cos2x$ a través de $Senx$ y de $Cosx$.

8) En las expresiones anteriores despeje senx y cosx, respectivamente y luego cambie el ángulo x por $\frac{x}{2}$ para obtener $Sen\frac{x}{2}$ y $Cos\frac{x}{2}$

9) Calcule $Sen2a$.

10) ¿La comunicación con mis compañeros en el colegio y con mis familiares ha sido la adecuada? Si he tenido dificultades, elaboro una lista de ellas y reflexiono sobre las posibles soluciones. Comparto con el subgrupo y con el profesor para tratar de beneficiarnos todos.

B

Leo, analizo e interpreto con un compañero de subgrupo, aplicando los conceptos de comunicación analizados en la presentación de la competencia, los conceptos que se describen a continuación. Escribo en mi cuaderno de matemáticas lo que aparece en el recuadro verde y si es preciso vuelvo a realizar los problemas propuestos y resueltos.

Recordemos que un polinomio en x es una función de la forma:

$a_0x^n + a_1x^{n-1} + ...+a_{n-1}x+a_n$, en donde los coeficientes son constantes, $a_0 \neq 0$ y n un número entero positivo cualquiera, incluso 0.

Además, si dos polinomios DEL MISMO GRADO toman iguales valores numéricos para cualquier valor de la variable, entonces los coeficientes de los términos de igual grado, en ambos polinomios, son iguales. Por ejemplo, si $2x^3 - 4x + 1 = ax^3 + bx - c \Rightarrow a = 2,\ b = -4$ y $c = -1$.

Todo polinomio de coeficientes reales se puede expresar (al menos en teoría) como producto de factores reales lineales de la forma ax + b, y de factores cuadráticos reales irreductibles, de la forma $ax^2 + bx + c$.

Una fracción de la forma $\frac{F(x)}{G(x)}$, en donde $F(x)$ y $G(x)$ son polinomios, recibe el nombre de fracción racional.

Si el grado de $F(x)$ es menor que el de $G(x)$, la fracción es PROPIA y en caso contrario es IMPROPIA.

Toda fracción racional impropia se puede expresar (por lo menos teóricamente) como suma de un polinomio y una fracción propia. En efecto, por el algoritmo de la división "el dividendo D es igual al divisor d por el cociente c, más el residuo r", o sea:

$D = dc + r$. Si se divide a los dos lados de la igualdad por d, queda:

$$\frac{D}{d} = \frac{c}{d} + \frac{r}{d} \Rightarrow \frac{D}{d} = c + \frac{c}{d}.$$

Toda fracción racional propia se puede expresar (por lo menos teóricamente) como una suma de fracciones simples cuyos denominadores son de la forma $(ax + b)^n$ o $(ax^2 + bx + c)^n$, siendo n un entero positivo; de acuerdo con la naturaleza de los factores, se pueden presentar cuatro situaciones:

1. Todos los factores del denominador son de primer grado y ninguno de ellos está repetido.

2. Todos los factores del denominador son de primer grado y algunos de ellos se encuentran repetidos, o sea, son de la forma $(ax + b)^n$.

3. El denominador contiene factores irreducibles de segundo grado, ninguno de los cuales se encuentra repetido.

4. El denominador contiene factores irreducibles de segundo grado y algunos de ellos están repetidos, es decir, toman la forma $(ax + bx + c)^n$.

Veamos qué debe de hacerse en cada caso:

1. A todo factor ax+b (que no aparezca repetido) del denominador, le corresponde una fracción parcial de la forma $\frac{A}{ax+b}$, en donde A es una constante a determinar.

2. A todo factor $(ax + b)^n$ del denominador le corresponden las fracciones parciales:
$\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \dots \frac{A_k}{(ax+b)^n}$, en donde A_1 - A_2 ,...A_k y son constantes a determinar.

3. A todo factor irreducible de segundo grado $ax^2 + bx + c$ del denominador (que no aparezca repetido) le corresponde la fracción parcial $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$, en donde A y B son constantes a determinar.

4. Si $ax^2 + bx + c$ es irreducible, entonces a todo factor $(ax^2 + bx + x^n)$ del denominador le corresponden fracciones parciales de la forma:
$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \dots + \frac{A_kx+B_k}{(ax^2+bx+c)^k}$, en donde A_1, A_2,... A_k y B_1 , B_2 ... B_k son constantes a determinar.

Ejemplos: descomponer en fracciones parciales:

a. $\frac{2}{(X-1)(3X-1)}$. Es una fracción propia y se trata del caso en el que aparecen factores distintos en el denominador. Luego: $\frac{2}{(X-1)(3X-1)} = \frac{A}{(X-1)} + \frac{B}{3X-1}$. Si se eliminan denominadores, resulta:

2= A(3X -1) + B(X-1) $\Longrightarrow$ 2 =3AX - A + BX - B. Reuniendo términos semejantes, da: 0X + 2 = (3A + B)X + (-A - B) $\Longrightarrow$ 3A + B = 0 y -A - B =2. Resolviendo el sistema, resulta que A = 1 y B = -3. Por tanto, si se reemplaza, queda:

$\frac{2}{(X-1)(3X-1)} = \frac{1}{X-1} - \frac{3}{3X-1}$, que es la solución como puede comprobarse efectuando la suma de la derecha para obtener el resultado de la izquierda.

Método alternativo: si en 2=A(3X-1) + B(X-1) se reemplazan los valores de x que anulan el denominador (primero x =1 y luego, $x = \frac{1}{3}$), resulta:

$2 = A(3*1-1) + B(1-1) \Rightarrow 2 = 2A + 0 \Rightarrow A = 1$; ahora, para $x = \frac{1}{3}$, se tiene:

$2 = A(3*\frac{1}{3} - 1) + B(\frac{1}{3} - 1) \Rightarrow 2 = 0 - \frac{2B}{3} \Rightarrow B = -3$, valores para A y B iguales a los obtenidos por el método anterior, con la ventaja de que se llega más rápido al resultado.

b. $\frac{3X+9}{X^2+X-2}$. Fracción propia. Si se factoriza, da: $\frac{3X+9}{(X+2)(x-1)}$, situación que se acomoda al mismo caso anterior. Luego, $\frac{3X+9}{(X+2)(x-1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1}$. Si se reduce a común denominador, queda:

$3x + 9 = A(x-1) + B(x+2) \Rightarrow 3x + 9 = Ax - A + Bx + 2B \Rightarrow 3x + 9 = (A+B)x + (-A+2B)$

Comparando coeficientes de polinomios iguales, da: A + B = 3 y -A + 2B = 9.

Resolviendo el sistema, resulta: A = -1 y B = 4. Luego, $\frac{3X+9}{X^2+X-2}$ es equivalente con $-\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{4}{x-1}$, como puede probarse realizando la suma.

Por el método alternativo, basta sustituir los valores que anulan el denominador (X=-2, X=1) en $3x+9=A(x-1)+B(x+2)$, obteniéndose primero:

$3(-2)+9=A(-2-1)+B(-2+2) \Rightarrow 3=-3A \Rightarrow A=-1$. Ahora para X = 1:, $3(1)+9=A(1-1)+B(1+2) \Rightarrow 12=3B \Rightarrow B=4$ resultado igual al hallado por el primer método.

c. $\dfrac{3x^2+5x+1}{x^3+3x^2-4}$. Es una fracción propia. Para factorizar el denominador, usamos la división sintética, como se ve enseguida:

$SiG(x)=x^3+3x^2-4 \Rightarrow G(1)=1+3-4=0 \Rightarrow x-1$ es factor de G(x). Si se efectúa la división sintética, disponiendo en forma de coeficientes separados, queda:

a=1	1	3	0	-4	x -1
		1	4	4	
	$1x^2$	4x	4	0	

Luego, $G(x)=x^3+3x^2-4=(x-1)(x^2+4x+4)$. Como el segundo factor es un trinomio cuadrado perfecto, se obtiene $G(x)=x^3+3x^2-4=(x-1)(x+2)^2$

Por tanto $\dfrac{3x^2+5x+1}{x^3+3x^2-4}=\dfrac{3x^2+5x+1}{(x-1)(x+2)^2}$. Como en el denominador hay un factor no repetido y uno repetido porque aparece al cuadrado, se presenta una combinación de las dos primeras opciones. Luego: $\dfrac{3x^2+5x+1}{(x-1)(x+2)^2}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x+2}+\dfrac{C}{(x+2)^2}$.

Eliminando denominadores, queda $3x^2+5x+1=A(x+2)^2+B(x-1)(x+2)+C(x-1)$

Operando, resulta $3x^2+5x+1=(A+B)x^2+(4A+B+C)x+(4A+2B-C)$. Comparando coeficientes y planteando el sistema simultáneo, da:

(1) A + B = 3
(2) 4A + B - C = 5
(3) 4A - 2B - C = 1

Cuya solución es A = 1; B = 2 y C = - 1. Luego:

$\dfrac{3x^2+5x+1}{x^3+3x^2-4}=\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{x+2}-\dfrac{1}{(x+2)^2}$, como puede verificarse efectuando la suma algebraica del consecuente.

Por el método abreviado, basta reemplazar los valores de x que anulan los denominadores (x = 1, x = - 2) en la ecuación: $3x^2+5x+1=A(x+2)^2+B(x+1)(x+2)+C(x-1)$ se obtienen dos de los valores (los de A y C, respectivamente); para hallar el otro valor, el de C, se le asigna a x cualquier valor (0, por ejemplo) y se reemplazan, tanto el valor de x como los de A y C en la misma ecuación y se despeja B.

d. $\dfrac{-x^2+x+8}{(x-1)(x^2+3)}$. Es fracción propia. Como aparecen un factor lineal y uno cuadrático irreducible, se acomoda a los casos 1 y 3. Por lo tanto:

$\dfrac{-x^2+x+8}{(x-1)(x^2+3)}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{Bx+C}{x^2+3}$. Eliminando denominadores, queda:

$-x^2+x+8=A(x^2+3)+(Bx+C)(x+1)$. Operando y transformando:
$-x^2+x+8=(A+B)x^2+(-B+C)x+(3A-C)$ Comparando coeficientes, se plantea el sistema simultáneo:

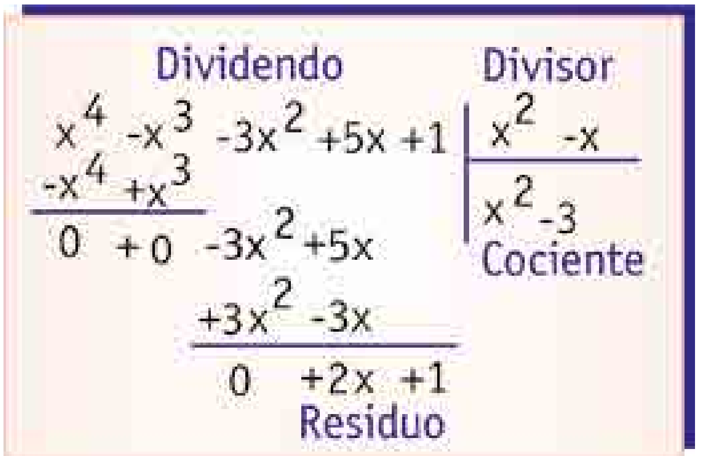
(1) A + B = -1
(2) C - B = 1
(3) 3A - C = 8

Cuya solución es A = 2, B = -3, C = - 2. Luego, el resultado es:

$\dfrac{-x^2+x+8}{(x-1)(x^2+3)}=\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{3x+2}{x^2+3}$, como puede comprobarse efectuando la suma que aparece en el consecuente de la igualdad.

Como entre los valores que anulan el denominador hay cantidades imaginarias, el método alternativo no es recomendable por el desperdicio de tiempo.

e. $\dfrac{x^4-x^3-3x^2+5x+1}{x^2-x}$. Es una fracción impropia, porque el grado del polinomio del numerador es mayor que el del denominador. Se efectúa primero la división (Como se muestra en la gráfica) para luego aplicar $\dfrac{D}{d}=c+\dfrac{r}{d}$ enunciada al principio de esta sección.



De donde $\dfrac{x^4-x^3-3x^2+5x+1}{x^2-x}=(x^2-3)+\dfrac{2x+1}{x^2-x}$. Ahora se descompone la fracción propia $\dfrac{2x+1}{x^2-x}$. Si se factoriza el denominador, queda $\dfrac{2x+1}{x^2-x}=\dfrac{2x+1}{x(x-1)}$ que corresponde al caso en el que hay factores lineales no repetidos en el denominador. Por tanto: $\dfrac{2x+1}{x(x-1)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x-1}$. Eliminando denominadores, da:

$2x + 1 = A(x-1) + Bx$. Desarrollando y comparando coeficientes, queda:

$2x+1=Ax-A+Bx \Rightarrow 2x+1=(A+B)x-A$. Luego:

(1) A + B = 2

(2) -A = 1

Cuya solución es A = -1 y B = 3. Por tanto: $\dfrac{2x+1}{x^2-x}=\dfrac{2x+1}{x(x-1)}=-\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x-1}$ y en consecuencia $\dfrac{x^4-x^3-3x^2+5x+1}{x^2-x}=(x^2-3)-\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x-1}$ que es la solución al ejercicio propuesto como puede comprobarse realizando la suma que aparece en el consecuente de la igualdad.

INTEGRACIÓN POR EL MÉTODO DE FRACCIONES PARCIALES

Es un artificio que permite integrar ciertas fracciones racionales que pueden

convertirse en fracciones parciales (como se comprobó en los ejemplos anteriores) cuyos elementos se pueden acomodar a integrales inmediatas u otras en donde se pueden aplicar otros métodos. Por ejemplo:

$\int\dfrac{x^2+2x+3}{x^3+x^2-x-1}dx$. Como no es una integral inmediata ni tampoco se pueden aplicar los métodos de sustitución ni por partes, intentamos descomponer el integrando en fracciones parciales.

Por división sintética, se factoriza el denominador, así:

$x^3+x^2-x-1=(x-1)(x^2+2x+1)$. Factorizando el trinomio queda:

$x^3+x^2-x-1=(x-1)(x+1)(x+1)=(x-1)(x+1)^2$. Luego:

$\dfrac{x^2+2x+3}{x^3+x^2-x-1}=\dfrac{x^2+2x+3}{(x-1)(x+1)^2}$. Por tanto:

$\dfrac{x^2+2x+3}{(x-1)(x+1)^2}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x+1}+\dfrac{C}{(x+1)^2}$. Planteando y resolviendo el sistema, resultan:

$A=\dfrac{3}{2}, B=-\dfrac{1}{2}$ y C = -1. De donde:

$\dfrac{x^2+2x+3}{(x-1)(x+1)^2}=\dfrac{3}{2(x-1)}-\dfrac{1}{2(x+1)}-\dfrac{1}{(x+1)^2}$. Integrando

$\int\dfrac{x^2+2x+3}{x^3+x^2-x-1}dx=\int\left(\dfrac{3}{2(x-1)}-\dfrac{1}{2(x+1)}-\dfrac{1}{(x+1)^2}\right)dx$. Luego:

$\int\dfrac{x^2+2x+3}{x^3+x^2-x-1}dx=\dfrac{2}{3}\ln|x-1|-\dfrac{1}{2}\ln|x+1|+\dfrac{1}{x+1}+C$, que es el resultado, como se puede comprobar derivando para obtener el integrando.

A continuación veremos aquí algunas integrales trigonométricas cuya solución se basa en ciertas identidades y en alguno de los métodos de integración ya vistos. Para tener éxito en este tipo de integrales es condición sine qua non manejar con propiedad, las principales identidades trigonométricas.

Las ecuaciones diferenciales trigonométricas más comunes se pueden integrar fácilmente transformándolas en integrales inmediatas mediante reducciones trigonométricas sencillas. Los casos más frecuentes son:

Para evaluar $\int Sen^2 Udu$ e $\int Cos^2 Udu$, que se presentan con frecuencia, se usan las identidades $Sen^2\theta = \frac{1}{2}(1 - Cos2\theta)$ y $Cos^2\theta = \frac{2}{2}(1 + Cos2\theta)$.

Por ejemplo: $\int Sen^2 3x = \int \frac{1}{2}(1 - Cos6x)dx$, que se puede integrar por sustitución.

Si $U = 6x \Rightarrow \frac{du}{dx} = 6dx = \frac{du}{6}$. Reemplazando:

$$\int Sen^2 3x = \int \frac{1}{2}(1 - Cos6x)dx = \frac{1}{2}\int (1 - CosU)\frac{du}{6} = \frac{1}{12}(U - SenU) + C.$$

Luego: $\int Sen^2 3xdx = \frac{1}{12}(6x - Sen6x) + C$.

Para integrar $\int Tan^2 x$ y $\int Cot^2 x$ se usan las identidades $1 + Tan^2 x = Sec^2 x$ y $1 + Cot^2 x = Csc^2 x$. Por ejemplo:

$\int Cot^2 3xdx = \int (Csc^2 3x - 1)dx$. Si $U = 3x \Rightarrow \frac{du}{dx} = 3 \Rightarrow dx = \frac{du}{3}$. Luego:

$\int Cot^2 3xdx = \int (Csc^2 3x - 1)dx = \int (Csc^2 U - 1)\frac{du}{3} = \frac{1}{3}(-CotU - U) + C$. O sea:

$\int Cot^2 3xdx = -\frac{1}{3}Cot3x - x + C$.

Para calcular integrales de la forma $\int Sen^m xCos^n xdx$ se utilizan las sustituciones U = Senx ó U = Cosx dependiendo de la paridad de m ó n.

Puede ocurrir que por lo menos uno de los números m ó n sea un entero impar y positivo y el otro cualquier real; o que tanto m como n son enteros positivos pares. En el primer caso la integral puede reducirse a una inmediata de la forma $\int X^k dx$, mediante transformaciones trigonométricas adecuadas. Por ejemplo, si m es impar, escribimos $Sen^m xdx = Sen^{m-1}xSenx$; y como m-1 es par, el primer factor del segundo miembro será una potencia de $Sen^2 x$ y podremos entonces

expresarlo como potencias de $Cos^2 x$, para obtener una integral de la forma: $\int$ (suma de términos que contienen $Cosx)*Senxdx$. Si el impar es n, se hace la descomposición de $Cos^n x$ y se expresa como potencias de $Sen^2 x$, para obtener $\int$ (suma de términos que contienen $Senx)*cosxdx$. De manera análoga, se aplica el procedimiento para resolver $\int Sen^n udu$ ó $\int Cos^n udu$, cuando n es impar.

Ejemplo: probar que $\int Sen^2 xCos^5 xdx = \frac{Sen^3 x}{3} - \frac{2Sen^5 x}{5} + \frac{Sen^7}{7} + C$. En efecto:

$\int Sen^2 xCos^5 xdx = \int Sen^2 xCos^4 xCosxdx$ (n es impar positivo).

$$\int Sen^2 xCos^5 xdx = \int Sen^2 x(Cos^2 x)^2 Cosxdx = \int Sen^2 x(1 - Sen^2 x)^2 Cosxdx$$

(por ser $Sen^2 x + Cos^2 x = 1$). Si $U = Senx \Rightarrow \frac{du}{dx} = Cosx \Rightarrow dx = \frac{du}{Cosx}$. Luego:

$$\int Sen^2 xCos^5 xdx = \int U^2(1 - U^2)^2 Cosx\frac{du}{Cosx} = \int (U^2 + 2U^4 + U^6)du$$

$$\int Sen^2 xCos^5 xdx = \frac{U^3}{3} - \frac{2U^5}{5} + \frac{U^7}{7} + C = \frac{Sen^3 x}{3} - \frac{2Sen^5 x}{5} + \frac{Sen^7}{7} + C$$

como se pide en la expresión original.

Ejemplo: probar que $\int Sen^3\frac{x}{2}dx = -2Cos\frac{x}{2} + \frac{2}{3}Cos^3\frac{x}{2} + C$. En efecto:

$$\int Sen^3\frac{x}{2}dx = \int Sen^2\frac{x}{2}Sen\frac{x}{2}dx = \int (1 - Cos^2\frac{x}{2})Sen\frac{x}{2}dx$$

Si $U = Cos\frac{x}{2} \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\frac{1}{2}Sen\frac{x}{2} \Rightarrow dx = -\frac{2du}{Sen\frac{x}{2}}$ Luego:

$$\int Sen^3\frac{x}{2}dx = \int (1 - U^2)Sen\frac{x}{2}\left(-\frac{2du}{Sen\frac{x}{2}}\right) = \int 2(U^2 - 1)du = 2\int (U^2 - 1)du$$

$\int Sen^3\frac{x}{2}dx = \frac{2U^3}{3} - 2U + C = \frac{2}{3}Cos^3\frac{x}{2} - 2Cos\frac{x}{2} + C$, como se planteó al principio del ejercicio.

Integrales de la forma $\int Tan^n udu$ ó $\int Cot^n udu$. Para resolver cualquiera de estas integrales se descompone el integrando de modo que aparezca una segunda potencia de Tanu o de Cotu, para poderla expresar a través de $Sec^2 u$ ó de $Csc^2 u$, respectivamente.

Ejemplo: probar que $Tan^4 xdx = \frac{Tan^3}{3} - Tanx + x + c$. En efecto:

$Tan^4 xdx = \int Tan^2 xTan^2 xdx = \int (Sec^2 x - 1)Tan^2 xdx$. Operando:

$\int Tan^4 xdx = \int (Sec^2 xTan^2 x - Tan^2)dx = \int Sec^2 xTan^2 xdx - \int (Sec^2 - 1)dx$.

Si $U = Tanx \Rightarrow \frac{du}{dx} = Sec^2 x \Rightarrow dx = \frac{du}{Sec^2 x}$. Luego:

$\int Tan^4 xdx = \int Sec^2 xU^2 (\frac{du}{Sec^2 x}) - Tan^2 x + x + C$.

Ahora: $\int Tan^4 xdx = \frac{U^3}{3} - Tanx + x + C = \frac{1}{3}Tan^3 x - Tanx + x + C$, como se pide en el enunciado.

Ejemplo: probar que $\int Cot^3 2xdx = -\frac{Cot^2 2x}{4} - \frac{\ln|Sen2x|}{2} + C$

$\int Cot^3 2xdx = \int Cot^2 2cCot2xdx = \int (Csc^2 2x - 1)$. Operando:

$\int Cot^3 2xdx = \int (Csc^2 2xCot2x - Cot2x)dx$. Separando sumandos:

$\int Cot^3 2xdx = \int Csc^2 2xCotxdx - \int Cot2Xdx$. Para la primera integral tomamos

$U{=}Cot2x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -2Cos^2 2x \Rightarrow dx = -\frac{du}{2Csc^2 2x}$. Para la segunda, tomamos

$U = Sen2x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -2Cos2x \Rightarrow dx = -\frac{du}{2Cos2x}$. Y reemplazando en ambas:

$\int Cot^3 2xdx = \int Csc^2 2xU(-\frac{du}{2Csc^2}) - \int \frac{Cos2x}{U}(\frac{du}{2Cos2x})$. Luego:

$\int Cot^3 2xdx = \int -\frac{1}{2}Udu - \int \frac{1}{U}du = \frac{1}{2}\frac{u^2}{2} - \frac{1}{2}\ln U + C$. Reemplazando:

$\int Cot^3 2xdx = -\frac{Cot^2 2x}{4} - \frac{\ln|Sen2x|}{2} + C$, como se pidió al principio.

Integrales de la forma $\int Sec^n xdx$ ó $\int Csc^n xdx$, cuando n es entero, positivo, par. Se descompone de modo que uno de los factores tenga una segunda potencia, que puede expresarse o al través de tanx o de cotx.

Ej: probar que $\int Sec^4 xdx = \frac{Tan^3 x}{3} + Tanx + C$. En efecto:

$\int Sec^4 xdx = \int Sec^2 xSec^2 xdx = \int (1 + Tan^2 x)Sec^2 xdx$. Haciendo:

$U = Tanx \Rightarrow \frac{du}{dx} = Sec^2 x \Rightarrow dx = \frac{du}{Sec^2 x}$. Reemplazando:

$\int Sec^4 xdx = \int (1 + U^2)Sec^2 x\frac{du}{Sec^2 x} = \int (1 + U^2)du = U + \frac{U^3}{3} + C$,

$\int Sec^2 xdx = \frac{Tan^3 x}{3} + Tanx + C$ como se deseaba probar.

Integrales que contienen el producto Sen*a*Sen*b*, Sen*a*cos*b*, CosaCos*b*.

Estas formas se pueden transformar en la suma o la diferencia de funciones trigonométricas homónimas, de acuerdo con las siguientes identidades:

1. $Sena + Senb = 2Sen(\frac{a+b}{2})Cos(\frac{a-b}{2})$
2. $Sena + Senb = 2Sen(\frac{a+b}{2})Cos(\frac{a-b}{2})$
3. $Cos a + Cosb = 2Cos(\frac{a+b}{2})Cos(\frac{a-b}{2})$
4. $Cosa - Cosb = -2Sen(\frac{a+b}{2})Sen(\frac{a-b}{2})$

Ejemplo: $\int Sen3xSen2xdx$. Como aparece un producto de senos, usamos la identidad 4, pero se ve que falta el factor -2. Por tanto multiplicamos por -2 tanto el numerador como el denominador, establecemos la equivalencia y la usamos para plantear un sistema simultáneo de ecuaciones:

$$\frac{-2Sen3xSen2x}{-2}=-\frac{1}{2}(-2Sen3xSen2x)$$. Luego: $(1)\frac{a+b}{2}=3x$ y

$(2)\frac{a-b}{2}=2x$, cuya solución es $a=5x$ y $b=x$. Reemplazando:

$$\frac{-2Sen3xSen2x}{-2}=-\frac{1}{2}(-2Sen3xSen2x)=-\frac{1}{2}(Cos5x-Cosx)$$. Luego:

$\int Sen3xSen2dx=\int -\frac{1}{2}(Cos5x-Cosx)dx$. Para integrar $Cos5x$ basta hacer $U=5x$,

para obtener $dx=\frac{du}{5}$. Luego:

$$\int Sen3xSen2xdx=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}Sen5x-Senx\right)=-\frac{1}{10}Sen5x+\frac{1}{2}Senx+C.$$

En guía anterior vimos el modelo $\frac{dP}{dt}=kP$, cuya solución es $P(t)=P_0e^{kt}$, en donde $P_0=P(0)$ y k es la diferencia entre las tasas de natalidad y de mortalidad, es la ecuación de crecimiento natural.

Supongamos ahora una muestra de material que contiene N(t) átomos de cierto isótopo (cuerpo que tiene los mismos elementos químicos que otro, pero de peso atómico diferente) en el instante t. Experimentalmente se ha comprobado que una fracción constante de esos átomos radioactivos decaen en forma espontánea, es decir, se convierten en átomos de otro elemento o de otro isótopo del mismo elemento en cada intervalo de tiempo. Por tanto, la muestra se comporta igual que una población con una tasa de mortandad constante, sin que ocurran nacimientos. Para expresar un modelo matemático que permita analizar esta situación se usa la ecuación $\frac{dN}{dt}=-k$ que podemos escribir separando variables, así: $\frac{dN}{N}=-kdt\Rightarrow\int\frac{dN}{N}=\int -kdt\Rightarrow \ln N=-kt+C$. Si se toman los dos miembros de la ecuación como exponentes, resulta que $e^{\ln N}=e^{-kt+C}$ y por las

propiedades de las funciones exponenciales y de los logaritmos, se tiene que $N=e^{-kt}e^{C}$. En el instante en el que $t=0$, $N=N_0$ y reemplazando resulta: $N_0=e^0e^C=e^C$. De donde $N(t)=N_0e^{-kt}$, en donde $N_0=N(0)$ es el número de átomos radioactivos del isótopo original presentes en la muestra en el instante $t=0$.

El valor de la constante k de decaimiento depende del isótopo en particular que se considere y se especifica con relación a la vida media m que se define como "el tiempo necesario para que la mitad de la muestra del isótopo decaiga". De acuerdo con esta definición: $t=m$ y $N=\frac{1}{2}N_0$. Si se reemplaza en N(t),

resulta: $\frac{1}{2}N_0=N_0e^{-km}\Rightarrow\frac{1}{2}=e^{-km}$. Aplicando ln a los dos lados:

$$\ln\frac{1}{2}=\ln e^{-km}\Rightarrow \ln 1-\ln 2=-km\ln e\Rightarrow -\ln 2=-km\Rightarrow m=\frac{\ln 2}{k}.$$

Los conceptos anteriores son la base del método de fechado con el radiocarbono catorce $\left({}^{14}C\right)$, isótopo que tiene una vida media de 5.700 años.

Problema: de acuerdo con una teoría cosmológica, había igual cantidad de los isótopos de uranio ${}^{235}U$ y ${}^{238}U$ en el momento de la creación del universo (la gran explosión o BIG BANG), En la actualidad hay 137.7 átomos de ${}^{238}U$ por cada átomo de ${}^{235}U$. Si las vidas medias de estos isótopos son 4.51 miles de millones de años para el ${}^{238}U$ y 0.71 miles de millones de años para el ${}^{235}U$, ¿Cuál es la edad del universo? (Tomado de "CÁLCULO", Edwards y Penney, 4ª edición).

Solución: sean $N_8(t)$ y $N_5(t)$ el número de átomos de ${}^{238}U$ y ${}^{235}U$, respectivamente en el instante t, en miles de millones de años desde la creación del universo. De acuerdo con la ecuación para N(t) se tiene: $N_8(t)=N_0e^{-kt}$ y $N_5(t)=N_0e^{-k_1t}$. Si se usa la ecuación para calcular la vida media m y se despeja la constante, queda:

$k=\dfrac{\ln 2}{m_8}$ y $k_1=\dfrac{\ln 2}{m_5}$ y reemplazando: $k=\dfrac{\ln 2}{4.51}$ y $k_1=\dfrac{\ln 2}{0.71}$

Si se dividen N_8 entre N_5, queda: $\dfrac{N_8}{N_5}=\dfrac{e^{-kt}}{e^{-k_1t}}=\dfrac{137.7}{1}$ entonces:

$e^{(k_1-k)t}=\dfrac{137.7}{1}$. De donde $\ln e^{(k_1-k)t}=\ln 137.7$, luego:

$(k_1-k)t=\ln 137.7 \Rightarrow t=\dfrac{\ln 137.7}{\dfrac{\ln 2}{0.71}-\dfrac{\ln 2}{4.51}} \Rightarrow t\approx 5.99$, o sea que el universo tiene una edad de unos 6 mil millones de años.

En los conceptos desarrollados vemos como los modelos matemáticos son valiosos elementos descubiertos por los científicos y que nos permiten a nosotros, los legos, aprovecharlos a través de un proceso de comunicación adecuado.

Precisamente, requerimos de la comunicación para procurar y mantener las buenas relaciones en todas las actividades de nuestra vida, particularmente en la familia, en el colegio y con las personas más cercanas a nosotros. En muchas ocasiones enfrentamos desacuerdos y discusiones sin sentido, provocadas talvez por una comunicación deficiente. Entender y hacerse comprender, nos facilita la convivencia y la armonía con quienes nos rodean.

De acuerdo con lo anterior, evaluemos cómo se está dando el proceso de comunicación en el desarrollo de la guía. Si se han presentado dificultades, busquemos las soluciones en forma inmediata.

A continuación se plantean dos series de ejercicios, de los cuales debo resolver con un compañero cinco de cada una, para afianzar los conocimientos sobre integrales. Compartan sus resultados con otros compañeros y con el profesor, tratando de ser muy claros en los mensajes.

Calcular las siguientes integrales por descomposición en fracciones parciales:

1. $\displaystyle\int \frac{2x+3}{x^3+x^2-2x}dx$
2. $\displaystyle\int \frac{2x^2+5x-1}{x^3+x^2-2x}dx$
3. $\displaystyle\int \frac{x^2+2x+3}{(x-1)(x+1)^2}dx$
4. $\displaystyle\int \frac{x^3+1}{x(x-1)^3}dx$
5. $\displaystyle\int \frac{4x^3+2x^2+1}{4x^3-x}dx$
6. $\displaystyle\int \frac{4x+3}{4x^3+8x^2+3x}dx$
7. $\displaystyle\int \frac{x^4-8}{x^3+2x^2}dx$
8. $\displaystyle\int \frac{x^3-2}{x^3-x^2}dx$
9. $\displaystyle\int \frac{4x^2+6}{x^3+3x}dx$

Probar las siguientes integrales:

1. $\displaystyle\int Sen^3 x dx=\frac{Cos^3 x}{3}-Cos x+C$
2. $\displaystyle\int Sen^2 x Cos x dx=\frac{Sen^3 x}{3}+C$
3. $\displaystyle\int Tan^3 x dx=\frac{Tan^2 x}{2}+\ln|Cos x|+c$

4. $\int Sen^2 2xdx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} Sen2xCos2x + C$

5. $\int Tan^4 xdx = \frac{Tan^3 x}{3} - Tanx + x + C$

6. $\int Sen^2 xCos^3 xdx = \frac{1}{3} Sen^3 x - \frac{1}{5} Sen^5 x + C$

7. $\int Sen^4 xdx = \frac{3x}{8} - \frac{1}{4} Sen2x + \frac{1}{32} Sen4x + C$

8. $\int Sen2xCos4xdx = \frac{1}{4} Cos2x - \frac{1}{12} Cos6x - C$

9. $\int Cos3xCos2xdx = \frac{1}{2} Senx + \frac{1}{10} Sen5x + C$

10. $\int Sen5xSenxdx = \frac{1}{8} Sen4x - \frac{1}{12} Sen6x + C$

Finalizados, discutidos y compartidos los resultados, ¿creen que los mensajes fueron interpretados por todos de igual manera? Si no fue así, ¿cuáles fueron las posibles causas de la diversidad de interpretaciones?

Ahora, con el mismo compañero, leemos y analizamos el siguiente relato:

El Coronel al capitán

Mañana a las nueve, habrá un eclipse de sol, fenómeno que no pasa cada día. Ordene que salga la tropa al patio en vestido de campaña para que puedan observar esta rareza natural, y yo estaré presente para explicarla. Si llueve no se verá nada, por tanto, ordenará que se lleve la tropa al gimnasio.

El capitán al teniente

Por orden del coronel, mañana habrá un eclipse de sol. Si llueve no se podrá ver desde el patio, en consecuencia, en vestido de campaña, el eclipse tendrá lugar en el gimnasio, fenómeno que no ocurre cada día.

El teniente al sargento

Mañana a las nueve, en vestido de campaña, el coronel eclipsará al sol en el gimnasio,

fenómeno que pasa cada día si hace buen tiempo. Si llueve, el acto tendrá lugar en el patio.

El Sargento al Cabo

Mañana a las nueve, el eclipse del coronel en vestido de campaña por el sol, tendrá lugar en el gimnasio. Si allí llueve, fenómeno que no pasa cada día, la tropa formará en el patio.

Comentarios entre la tropa

Mañana, si llueve, el sol eclipsará al coronel en el gimnasio. Lástima que este fenómeno no pase cada día.

Hagan una lista de las posibles causas que ocasionaron la distorsión de la información original. Compartan con otros compañeros.

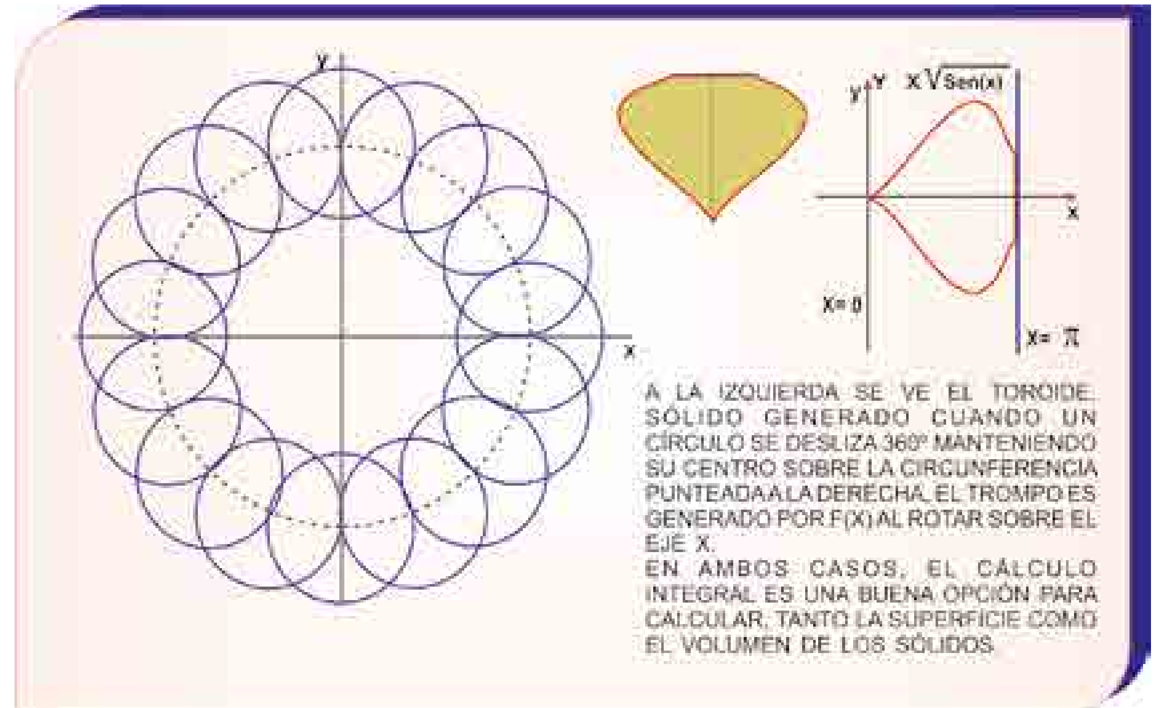
Como aplicación a los conceptos dados sobre cálculo integral y basándome en lo expuesto en la última parte de la sección B, le doy solución a la siguiente situación.

Un pedazo de carbón de leña encontrado por un arqueólogo contiene el 63% de carbono catorce $\left({}^{14}C\right)$ con respecto de una muestra de carbón actual. Utilizando el modelo $\frac{dN}{dt} = -kN$, con $N_0 = N(0)$. ¿Cuál es la edad de la muestra? (3800 años aproximadamente).

ESTUDIO Y ADAPTACIÓN DE LA GUÍA

GUÍA 4

EL OPERADOR SIGMA Y LA INTEGRAL DEFINIDA



INDICADORES DE LOGRO

- Identifica y usa correctamente el operador Σ
- Desarrolla la serie de términos que resultan del operador sigma y halla la sumatoria mediante la fórmula que se indica
- Calcula el área bajo una curva usando la sumatoria de las áreas rectangulares iguales
- Define y calcula la integral DEFINIDA de una función y la utiliza para calcular áreas de algunas superficies cuyas fronteras se dan
- Incorpora a sus actividades las herramientas informáticas (MANEJO TECNOLÓGICO)
- Interpreta y aplica las instrucciones y maneja efectivamente los principales instrumentos y ayudas que ofrecen las tecnologías aplicables a su entorno
- Realiza manejo preventivo y reparación básica de las herramientas usadas en sus procesos
- Utiliza las herramientas en forma adecuada, procurando su seguridad personal

Con un compañero leemos y comentamos el contenido siguiente:

Debido a la enorme importancia que en el mundo de hoy tiene el conocimiento de herramientas tecnológicas que nos permitan ser más eficientes en nuestro quehacer, en esta guía volveremos sobre la **C.L.G. MANEJO TECNOLÓGICO** que se define como **"la capacidad para identificar, seleccionar y utilizar en forma apropiada los instrumentos y programas necesarios que nos permitan ser más eficientes en nuestro desempeño, tanto en nuestro quehacer escolar actual como en nuestra vida laboral futura"**. (Tomada de PROYECTO: "EDUCACIÓN MEDIA, CON ÉNFASIS EN EDUCACIÓN PARA EL TRABAJO").

En esta ocasión aprenderemos a elaborar gráficas de funciones reales usando la aplicación CABRI II cuya licencia debe de estar en su institución, aunque en Internet existe una aplicación similar, llamada REGLA Y COMPÁS, y que es de uso libre en la red.

De mucha utilidad es la combinación de varias de las herramientas de CABRI para dibujar la gráfica de una función. El fundamento de la construcción de la gráfica hace referencia a la definición de función y al conocimiento de su dominio, pues es claro que a dicha variable sólo pueden asignársele elementos de ese dominio, dado que sin esta condición se visualizará un mensaje de error al intentar calcular el valor de la función. Cabe recordar aquí que, en principio, las funciones se definen en el conjunto de los números reales, pero debe indagarse si hay posibles casos de división por cero y la existencia de raíces pares o logaritmos de reales negativos. (Ver guía 1 de la unidad 2).

Conocidos la definición y el dominio de una función, el trazado de la gráfica usando CABRI, se reduce a pedirle a la máquina que dibuje el lugar geométrico de los puntos que satisfacen cierta condición, implícita en la definición analítica (fórmula), situación que veremos más adelante mediante algunos ejemplos.

En el campo laboral es innegable el uso, cada vez más frecuente, de herramientas tecnológicas que facilitan la realización eficiente de muchas tareas rutinarias, pero necesitan de personal idóneo y capacitado para manejarlas. Tal es el caso, digamos, de calculadoras, impresoras, despulpadoras, cosechadoras... y tantas otras, pues la tecnología actual suministra herramientas para todas las actividades.

A

Leo e intento resolver las siguientes cuestiones que se requieren para encarar el tema de esta guía. Si tengo dificultades, consulto en las fuentes adecuadas.

- Escribo las fórmulas para calcular el área del rectángulo, del triángulo y del trapecio.
- Si $Y = F(x) = 2X^3 - X^2 + 1$, calculo F(1), F(-2), F(0) y F(a).
- ¿Qué tecnología puede usar para resolver las anteriores situaciones?

B

Leo, analizo e interiorizo los conceptos que se describen. Anoto en el cuaderno de matemáticas lo que aparece en el recuadro verde y si es preciso, copio conscientemente los ejercicios que aparecen resueltos.

Una de las principales aplicaciones del cálculo integral se relaciona con la búsqueda del área bajo una curva, problema ya encarado en la antigua Grecia por Arquímedes mediante el método exhaustivo, que consiste en reducir dicha área a la sumatoria del área de rectángulos de base cada vez más estrecha, tendiendo a cero. Veremos, pues, el manejo del operador sigma que permite expresar una sumatoria, para luego desembocar en la integral definida.

El operador Σ. Si queremos indicar la suma de los diez primeros números naturales, escribimos 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10. Pero podemos expresar lo mismo usando un símbolo más compacto, llamado el OPERADOR SIGMA, así $\sum_{j=1}^{10} J$, que se lee "Suma de los elementos J, variando J entre 1 y 10.

Otros ejemplos del operador de sumatoria son:

$$\sum_{j=1}^{6} J^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36$$

$$\sum_{j=1}^{5} (J-1)^3 = 0^3 + 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 0 + 1 + 8 + 27 + 64$$

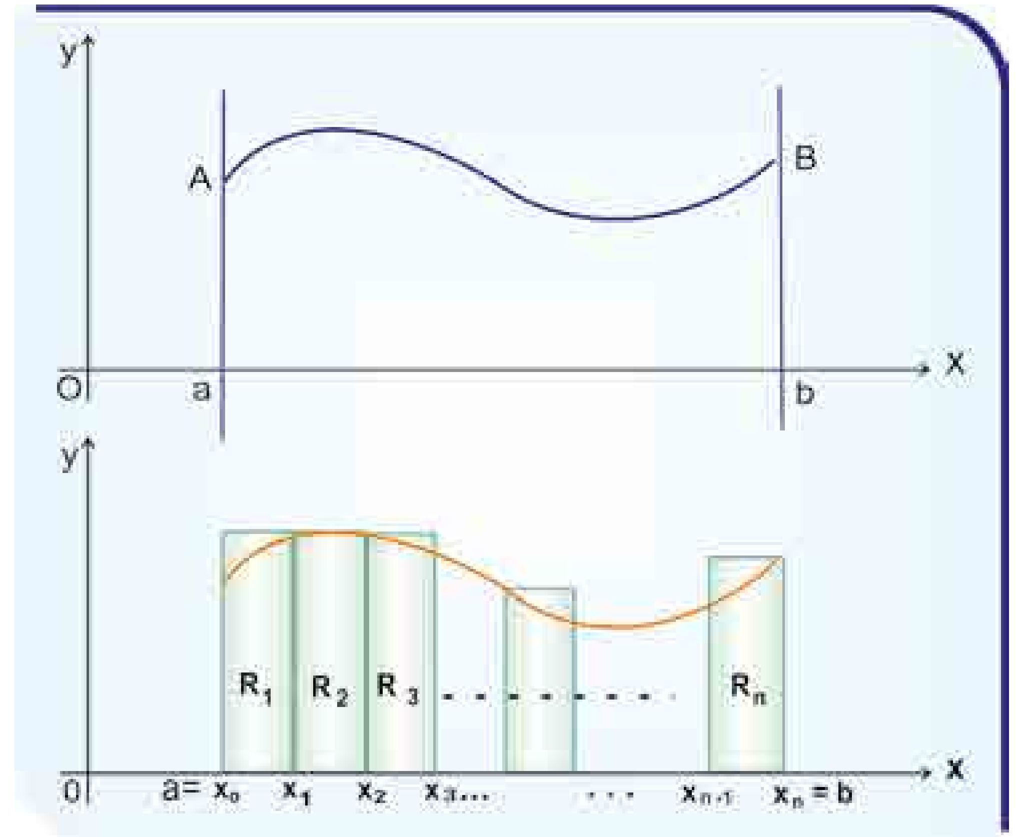
$$\sum_{j=0}^{n} 2^j = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots 2^n = 1 + 2 + 4 + 8 + \ldots 2^n$$

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^j * j = (-1)^0 * 0 + (-1)^1 * 1 + (-1)^2 * 2 + \ldots (-1)^n * n =$$

$$0 - 1 + 2 - 3 + \ldots + (-1)^n * n$$

El área bajo una curva: la medida del área de una región plana (o no) es un número real; en el caso particular de una región triangular plana, por ejemplo, la medida del área está expresada por el semiproducto de las medidas de uno de los lados y de la altura relativa al lado considerado; si es una región rectangular plana, la medida del área se expresa como el producto de las medidas de dos lados consecutivos; el de una región circular plana es el límite del área de una región poligonal regular de n lados inscrita o circunscrita a la circunferencia frontera, cuando el número de lados tiende a infinito.

Consideremos una función Y=F(x), continua (que no se interrumpe) y positiva (que está por encima del eje x), cuya gráfica es la curva AB que se muestra en la parte superior de la figura:



Nótese que la frontera superior es, como ya se dijo, la curva de la función $Y = F(x)$; la frontera izquierda es la recta X = a; la frontera derecha es la recta X = b; la frontera inferior es el eje horizontal cuya ecuación es Y = 0.

Si el intervalo $[a, b]$ se divide en n sub-intervalos congruentes cuyos extremos respectivos son: $a = x_0, x_1, x_2 \ldots\ldots x_{n-1}, x_n = b$ y de tal modo que $x_0 < x_1 < x_2 < x_3 \ldots\ldots < x_{n-1} < x_n$, se puede hallar una aproximación al área, sumando las áreas de todos los rectángulos sombreados que se muestran en la parte inferior de la gráfica, o sea: $Area = R_1 + R_2 + R_3 + \ldots. + R_n$.

Ahora, área de $R_1 = (x_1 - x_0) * F(x_1)$

Área de $R_2 = (x_2 - x_1) * F(x_2)$

Área de $R_3 = (x_3 - x_2) * F(x_3)$

.

.

.

Área de $R_n = (x_n - x_{n-1}) * F(x_n)$. Si se suma ordenadamente, da:

$R_1 + R_2 + R_3 + ...R_n = (x_1 - x_0)F(x_1) + (x_2 - x_1)F(x_2) + (x_3 - x_2)F(x_3) + (x_n - x_{n-1})F(x_n)$

Como todos los intervalos son congruentes, se puede afirmar que:

$$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = ... = x_n - x_{n-1},$$

y si la longitud es $l = \dfrac{b-a}{n}$,

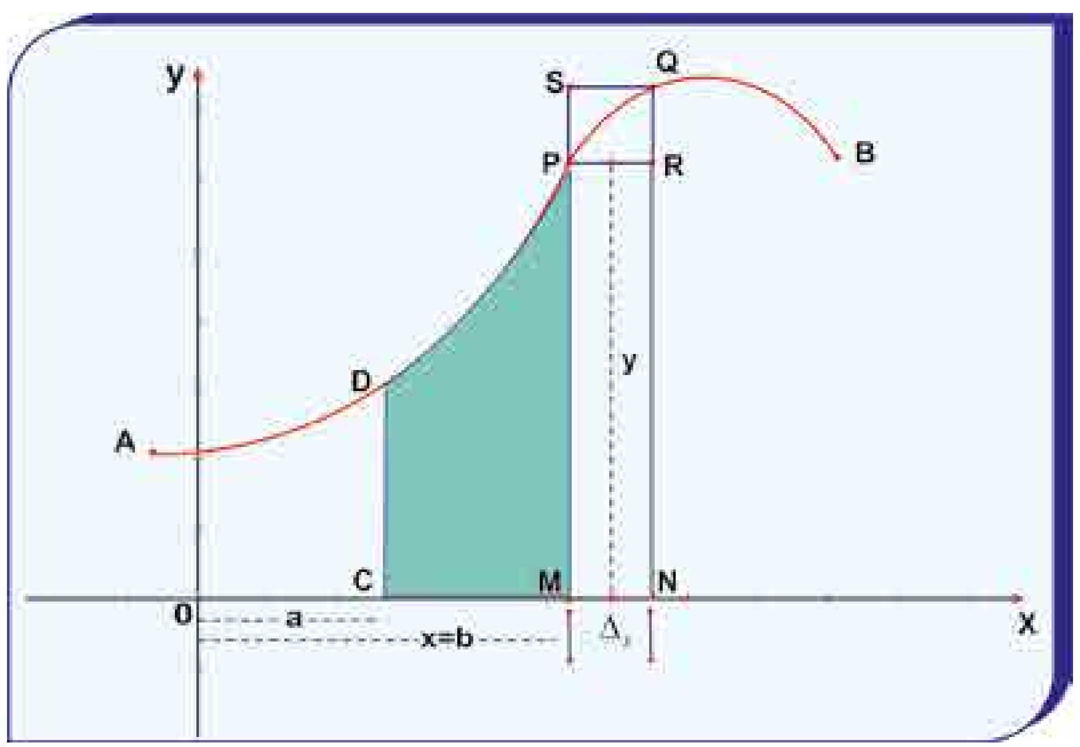
queda: $R_1 + R_2 + R_3 + ...R_n = l[F(x_1) + F(x_2) + F(x_3) + ...)F(x_n)]$.

O sea: $\sum_{j=1}^{n} R_j = l \sum_{j=1}^{n} F(x_j)$.

Por ser $l = \dfrac{b-a}{n}$, cuando n crece, l es cada vez más pequeño; además, cuanto más crece el número n de intervalos tanto mayor es la aproximación del área buscada, lo que significa que el área entre a y b queda definida por:

Área entre a y b = $\lim_{n \to \infty} l \sum_{j=1}^{n} F(x_j)$.

CONEXIÓN CON LA INTEGRAL



Como en el caso anterior, consideremos el área limitada por la función Y=F(X), el eje de las X, la recta X=a y X=b (La superficie de color azul de la figura anterior). Sea CD una ordenada fija y MP una ordenada variable y U la medida del área CMPD.

Cuando x toma un incremento pequeño Δ_x, U toma un incremento Δ_u, que corresponde al área MNPQ. Completando los rectángulos MNRP y MNQS, se ve que el área MNRP es menor que el área MNQP y ésta a su vez es menor que el área MNQS, o sea: *ÁreaMNRP < ÁreaMNQP < ÁreaMNQS*.

Luego: $\Delta_x * MP < \Delta_u < \Delta_x * NQ$; y dividiendo por Δ_x: $MP < \dfrac{\Delta_u}{\Delta_x} < NQ$.

Ahora, hagamos tender Δ_x hacia cero; como MP queda fija y Q tiende hacia P, es lógico que NQ tenderá hacia MP. En esas condiciones:

$\lim_{Q \to P} NQ = \lim_{\Delta_x \to 0} \dfrac{\Delta_u}{\Delta_x}$. Y pasando al límite:

$MP = \dfrac{du}{dx}$. Como MP es una ordenada ($y=F(x)$), resulta que $du = F(x)dx$, que es una ecuación diferencial, que se resuelve por integración. Por lo tanto, si se integra a los dos lados, queda: $\int du = \int F(x)dx$; cuya solución es $U = f(x) + C$. Para hallar C, observamos que cuando $U = 0$, $x = a$, y sustituyendo en la solución general: $0 = f(x) + C$; luego $C = -f(x)$ y en consecuencia, la solución se convierte en: $U = f(x) - f(a)$. Finalmente, si hacemos $x = b$ (con $b > a$) se obtiene:

Área CMPD = $f(b) - f(a)$. Esta diferencia se representa por: $\int_a^b f'(x)dx$, que se lee "la integral desde a hasta **b** de f'(x) por diferencial dx. La operación se llama integración entre límites; **a** es el límite inferior y **b** el límite superior. Como al hacer los cálculos la constante de integración desaparece, la expresión anterior se llama **integral definida**. En efecto:

$\int_a^b f'(x)dx = [f(x) + C]_a^b = \{f(b) + C\} - \{f(a) + C\} = f(b) - f(a)$, que constituye el teorema fundamental del cálculo o regla de Barrow.

Como se ve, para resolver la integral definida se integra la función y sin tener en cuenta la constante de integración, pues se anula, se calcula el valor de la función para el límite superior **b**, se halla el valor de la función para el límite inferior a, y finalmente se establece su diferencia.

Ejemplo1: hallar $\int_1^4 X^2 dx$

Solución: $\int_1^4 X^2 dx = \left[\frac{X^3}{3}\right]_1^4 = \left[\frac{4^3}{3}\right] - \left[\frac{1^3}{3}\right] = \frac{64}{3} - \frac{1}{3} = 21$

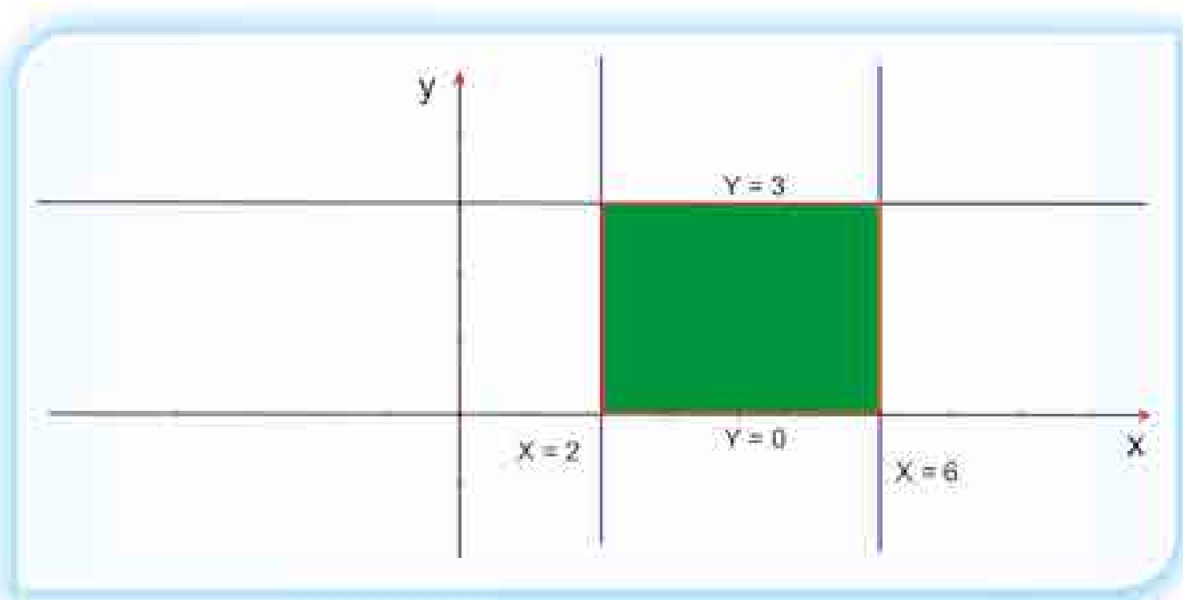
Ejemplo 2: hallar $\int_0^\pi CosXdx$

Solución: $\int_0^\pi CosXdx = [SenX]_0^\pi = (Sen\pi - Sen0) = 0 - 0 = 0$

$\int_0^\pi CosXdx = [SenX]_0^\pi = Sen\pi - Sen0) = 0 - 0 = 0$

Como aplicación al cálculo de área usando la integral definida, se proponen algunos problemas que pueden ser comprobados utilizando fórmulas de la geometría.

1. En la siguiente figura, calcular el área limitada por la función Y = 3, X = 2, X = 6 y el eje de las equis (Y = 0).



Solución: se trata de calcular el área de color verde.

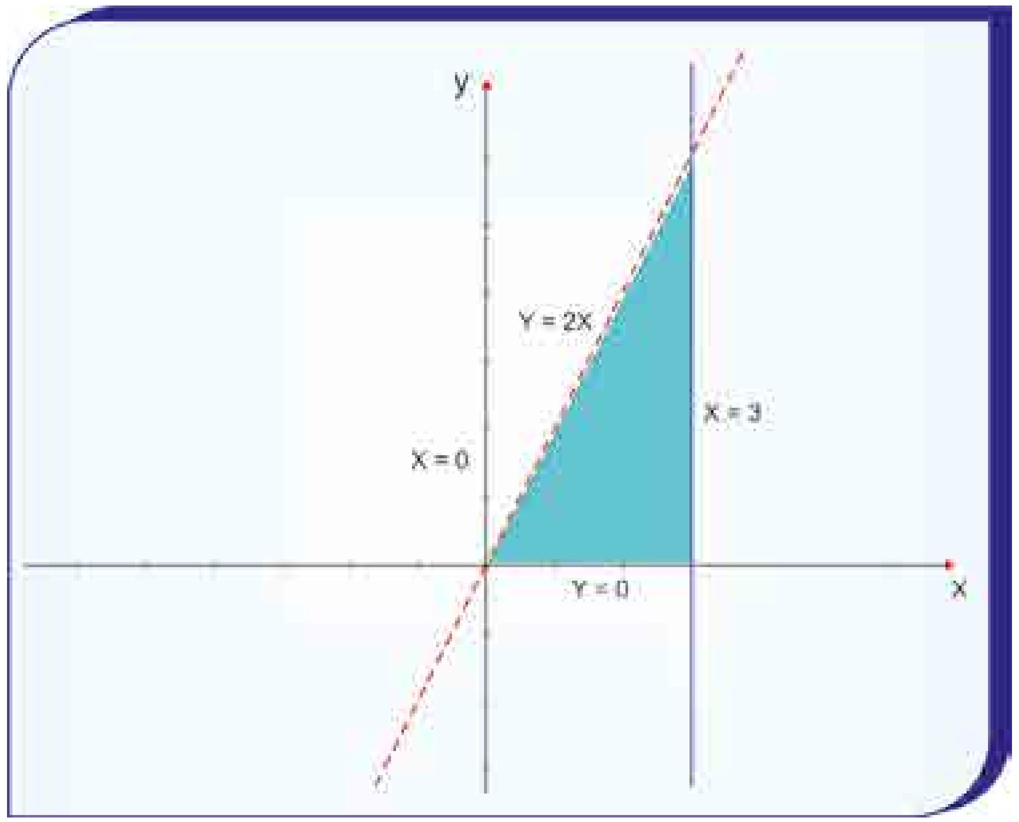
Área = $\int_2^6 3dx = [3X]_2^6 = (3 * 6) - (3 * 2) = 18 - 6 = 12$ $unidades^2$

Comprobación geométrica:

Se trata de hallar el área de un rectángulo que tiene 4 y 3 unidades de longitud en

la base y la altura, respectivamente. Luego Área = 4 * 3 = 12 unidades cuadradas, resultado igual al obtenido antes.

2. En la figura que sigue, hallar el área de color azul que está limitada por la función *Y*=2*X*, *X*=0, *X*=3, *Y*=0



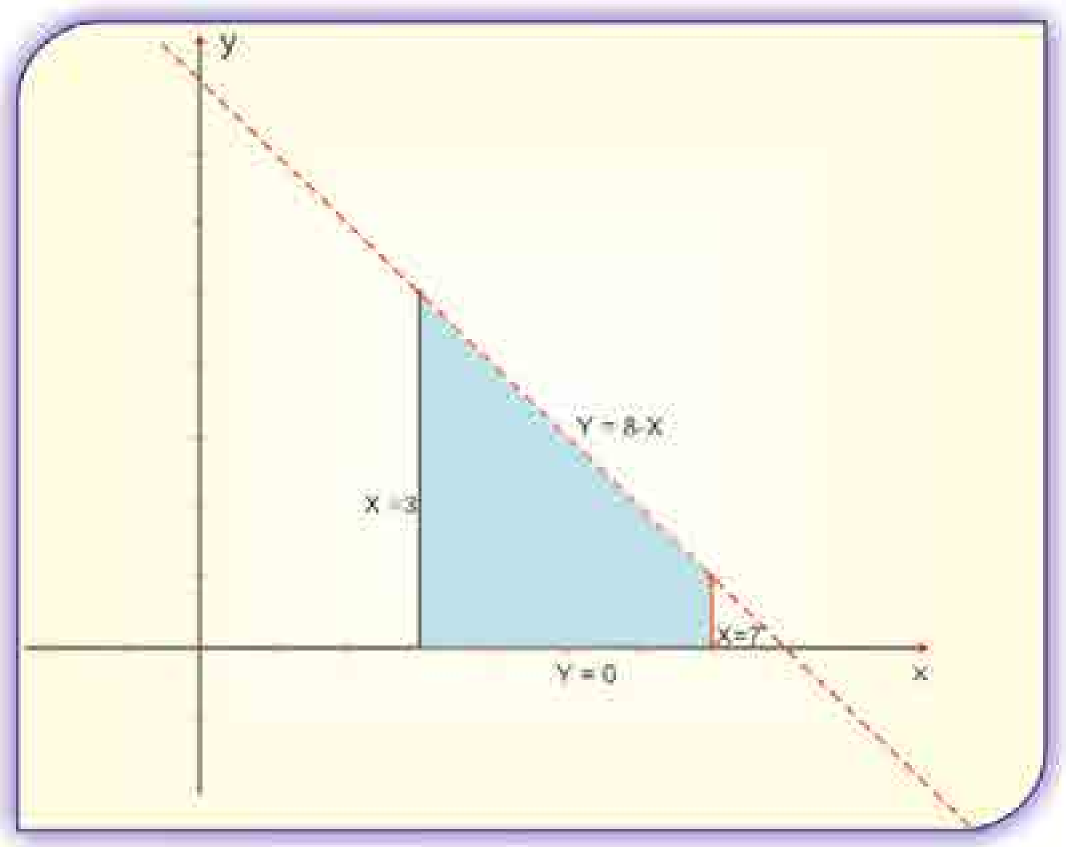
Solución: Área = $\int_0^3 2Xdx = [X^2]_0^3 = (3^2) - (0^2) = 9 - 0 = 9$ unidades cuadradas.

Comprobación geométrica:

En el triángulo, si X = 3 entonces Y = 6. Luego la base y la altura del triángulo miden 3 y 6 unidades, respectivamente. Y para el triángulo:

Área = $\frac{base * altura}{2} = \frac{3 * 6}{2} = 9$ unidades cuadradas, resultado igual al anterior.

3. En la figura siguiente hallar el área de color azul.



Solución: el área está limitada por la función Y = 8 - X, X = 3, X = 7, Y = 0. Luego:

$$\text{Área} = \int_3^7 (8-X)\,dx = \left[8X - \frac{X^2}{2}\right]_3^7 = \left(8*7-\frac{7^2}{2}\right)-\left(8*3-\frac{3^2}{2}\right) = \frac{63}{2}-\frac{39}{2} = 12\ \text{U}^2$$

Comprobación geométrica:

La superficie azul corresponde a un trapecio cuyas bases miden 5 y 1 unidades, respectivamente, y cuya altura es de 4 unidades. Por tanto:

$$\text{Área} = \frac{(Base1 + Base2) * altura}{2} = \frac{(5+1)*4}{2} = 12$$ unidades cuadradas, igual que por el método de la integral definida.

Propiedades de la integral definida

1. $\int_a^a f'(x)dx = 0$

2. $\int_a^b f'(x)dx = -\int_b^a f(x)$

3. $\int_a^b Cf'(x)dx = C\int_a^b f'(x)$, siendo C una constante.

4. $\int_a^b [f'(x)x \pm g'(x)]dx = \int_a^b f'(x)dx \pm \int_a^b g'(x)dx$

5. $\int_a^b f'(x)dx + \int_b^c f'(x)dx = \int_a^c f'(x)dx$, siendo a < b < c

Desarrollado el tema de cálculo planteado en la guía, hagamos uso de una herramienta tecnológica para construir gráficas como las que se vieron en el desarrollo del paso B. Usaremos la aplicación CABRI II.

Con un compañero, vayan a la sala de computadores y ejecuten, paso a paso y comprensivamente, lo siguiente:

Entramos a CABRI; con **Mostrar ejes** de la herramienta Dibujo (botón 11) visualizamos el plano cartesiano. Para hallar algún punto que cumpla la condición impuesta en la definición se usan **Punto** sobre objeto de la herramienta **Puntos** (botón 2), se dibuja un punto A sobre el eje X , de modo que su abscisa X le pertenezca al dominio de la función; mediante la opción **Ecuación y coordenadas** de la herramienta **Medir** (botón 9) visualizamos las coordenadas de A. Para calcular el valor Y de la función es suficiente activar **Calcular** de la herramienta **Medir** (botón 9) e ir introduciendo en la calculadora las cantidades y los operadores correspondientes, teniendo el cuidado de asignarle a la variable X la abscisa del punto A, señalándola con el puntero. El resultado se obtiene pulsando " = ". Con clic sostenido se arrastra ese resultado a cualquier parte de la pantalla. Ahora, se localiza en el plano cartesiano un punto P cuya abscisa sea la misma de A y que tenga por ordenada el valor Y de la función (el que acabamos de calcular). Para ubicar con precisión el valor de Y se activa la opción **Transferencia de medidas** de la herramienta **Construir** (botón 5), apuntamos al resultado (valor de Y) y luego señalamos el eje vertical desde el origen: se visualiza un punto sobre ese eje. Se trazan entonces una perpendicular al eje Y por ese punto y otra perpendicular al eje X por el punto A, se dibuja la intersección P de las dos perpendiculares. (P es un punto que satisface el lugar geométrico especificado en la definición). Se puede comprobar que si con el puntero se desplaza el punto A sobre el eje X, el punto P describe cierta trayectoria en el plano. Para visualizar esa trayectoria (la gráfica de la función) es suficiente activar la opción **Lugar geométrico** de la herramienta **Construir** (botón 5), apuntar primero a P y luego al punto A.

Ejemplo 1: dibujar la gráfica de la función lineal Y = 2X - 3

a) Empezamos con **Mostrar ejes** de la herramienta **dibujo**. Con los botones de desplazamiento centramos el sistema de coordenadas (por comodidad).

b) Con **Comentarios** de la herramienta **Ver** (botón 10) se escribe la fórmula que define la función: Y=2X-3 (se hace como ayuda al emplear la calculadora, pero podría no escribirse).

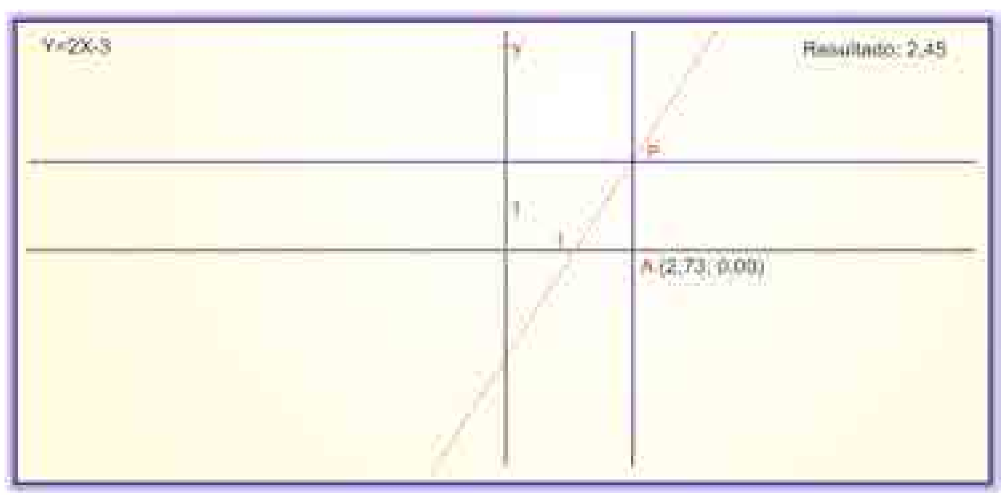
c) Como el dominio son los reales, con **Punto** de la herramienta **Puntos** se crea un punto A sobre el eje X y con **Ecuación y coordenadas** de la herramienta **Medir**, se buscan las coordenadas del punto A.

d) Con **Calcular** de la herramienta **Medir** se introduce en la calculadora la expresión 2* (se señala la abscisa de A) - 3. Al pulsar "=" aparece el valor de "Y", resultado que se debe arrastrar hasta una zona libre del área de trabajo.

e) **Con Transferencia de medidas** de la herramienta **Construir**, se pasa el resultado anterior al eje "Y", desde el origen y acorde con el signo, visualizándose un segmento que va desde el punto (0, 0) hasta el punto que dibujó la máquina.

f) Por el punto antes nombrado se traza una perpendicular al eje Y, por el punto A una perpendicular al eje X y en la intersección de esas perpendiculares se dibuja el punto P, que es quien va a generar el lugar geométrico cuando se desplaza A sobre el eje horizontal, como puede comprobarse pulsando en la opción **Puntero** de la herramienta **Punteros** (botón 1) y con clic sostenido se arrastra el punto A sobre el eje horizontal.

g) Con **Lugar geométrico** de la herramienta **Construir**, se apunta primero a P y luego a A (el lugar geométrico generado por P cuando se desplaza A) para que aparezca la gráfica de la función lineal, como se ve en la figura.



Si se desea, se pueden ocultar las rectas perpendiculares mediante la opción **Ocultar/ Mostrar** de la herramienta **Dibujo** (botón 11) para mejorar el aspecto de la gráfica. También se puede pulir la gráfica si con la opción **Puntero** de la herramienta **Punteros** se selecciona (enmarcándola en un rectángulo) la parte de la gráfica que se requiera y con **Copiar** de la opción **Edición** de la barra de menús se lleva la figura a un graficador como PAINT, usando **Pegar** de la opción **Edición** de la barra de menús. Ahora puede arreglar la gráfica de acuerdo con sus preferencias.
Ejemplo 2: construir la gráfica de Y = Sen(x).

En la calculadora de CABRI están predefinidos algunos operadores como el acento circunflejo " ^ ", que se usa para indicar potenciación y que se puede obtener desde el teclado numérico activando **Num Lock** y sosteniendo **Alt** mientras se digita el código **ascii** 94; también están disponibles los signos de operación +, -, *, /; los paréntesis ( ); igualmente hay algunas funciones especiales como seno, coseno, tangente y sus inversas que se obtienen usando Inv; raíz cuadrada (sqrt), logaritmo natural (ln), logaritmo decimal (log), valor absoluto (abs) y la constante Pi. Con " = ", que aparece en dos partes, se obtiene el resultado final, el cual, con clic sostenido, puede arrastrarse a cualquier lugar del área de trabajo. Para dibujar la gráfica de la función Y=Sen(x) el proceso es exactamente igual al del ejemplo 1 y por tanto se omiten los nombres de las herramientas en las que se encuentra cada opción:

a) Con **Mostrar ejes** se visualizan y se centran.

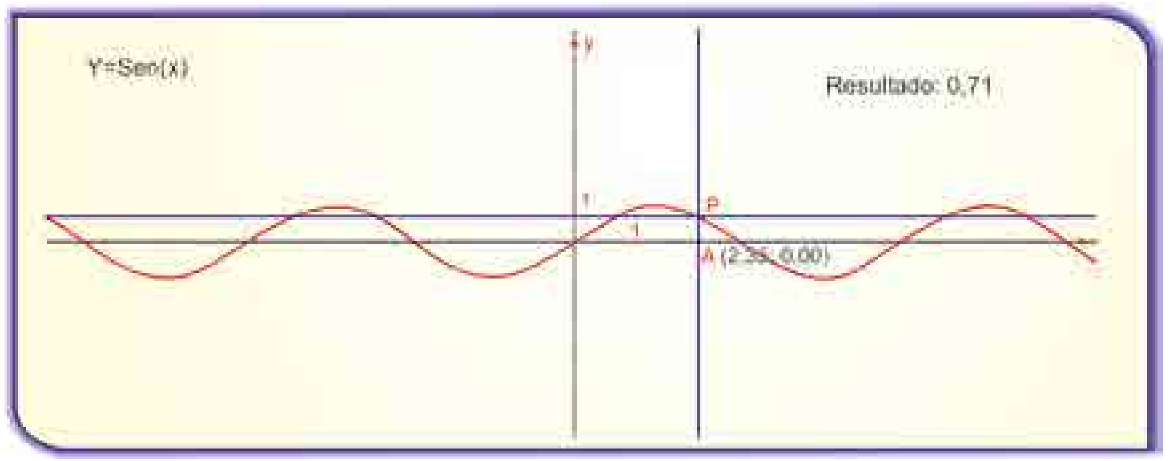
b) Con **Comentarios** se escribe Y=Sen(x) (recuérdese que el objetivo es guiarnos para realizar las operaciones con la calculadora de CABRI).

c) Como el dominio son los reales, sobre el eje x se dibuja un punto A y se leen sus coordenadas usando **Ecuación y coordenadas.**

d) Con **Calcular** se abre la calculadora y se señalan con el puntero Sin, la abscisa de A y después en ") " para cerrar el paréntesis. Se pulsa " = "; se arrastra el resultado a una zona libre del área de trabajo.

e) Con **Transferencia de medidas** se pulsa sobre el resultado anterior y sobre el eje Y, desde el cero. Luego se construye una **Perpendicular** al eje Y por el extremo del resultado anterior y otra **Perpendicular** al eje X que pase por A y se dibuja un punto P en su intersección.

f) Con **Lugar geométrico** se señalan, primero P y luego A para que la gráfica se visualice de modo similar a la que se ve en la figura:



Para afianzar los conocimientos, con un compañero resolvemos los siguientes ejercicios.

Dadas las siguientes sumatorias, calcular los 10 primeros elementos en cada caso y luego comprobar la validez de la fórmula usando valores particulares de n:

1. $\sum_{j=1}^{n} 2j = n(n+1)$
2. $\sum_{j=1}^{n} (2j-1) = n^2$
3. $\sum_{j=1}^{n} j^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$
4. $\sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
5. $\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}$

Verificar las siguientes integrales:

1. $\int_1^3 x^3 dx = 20$
2. $\int_0^2 (2+x)dx = 6$
3. $\int_0^3 (2-x)^2 dx = \frac{8}{3}$
4. $\int_0^3 (3-2x+x^2)dx = 9$
5. $\int_{-1}^{2} (1-x^2)dx = \frac{9}{4}$
6. $\int_1^e \frac{dx}{x} = 1$
7. $\int_2^3 \frac{2tdt}{1+t^2} = \ln 2$
8. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} Cosxdx = 1$
9. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} Sec^4 xdx = \frac{4}{3}$
10. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{Cosx}{Senx} dx = 1-\sqrt{2}$

Por integración, hallar el área de la superficie limitada por la función dada, las rectas dadas y el eje de las x. En cada caso elaborar una gráfica usando CABRI si es posible.

1. $y = x^3$; x = 0; x = 2; (4 unidades cuadradas).
2. $y = x^2$; x = 1; x = 3; (26/3).
3. $y = 4x - x^2$; Las rectas pasan por los puntos de corte de la curva con el eje de las x. (32/3unidades cuadradas).
4. $y = x^2 + x + 1$; x = 0; x = 2; (10 unidades cuadradas).

5. $y = 2x + \dfrac{1}{x^2}$; x = 1; x = 4; (15,75 unidades cuadradas).

Usando CABRI, elaboro las gráficas de las siguientes funciones.

1. Y = X^3 - 4X^2 + 3X +1 (equivale a $Y = X^3 - 4X^2 + 3X + 1$)

2. Y=Log(x)

3. Y= $\dfrac{2}{x}$ (observen que X no puede tomar el valor 0)

4. Y = Abs(x)

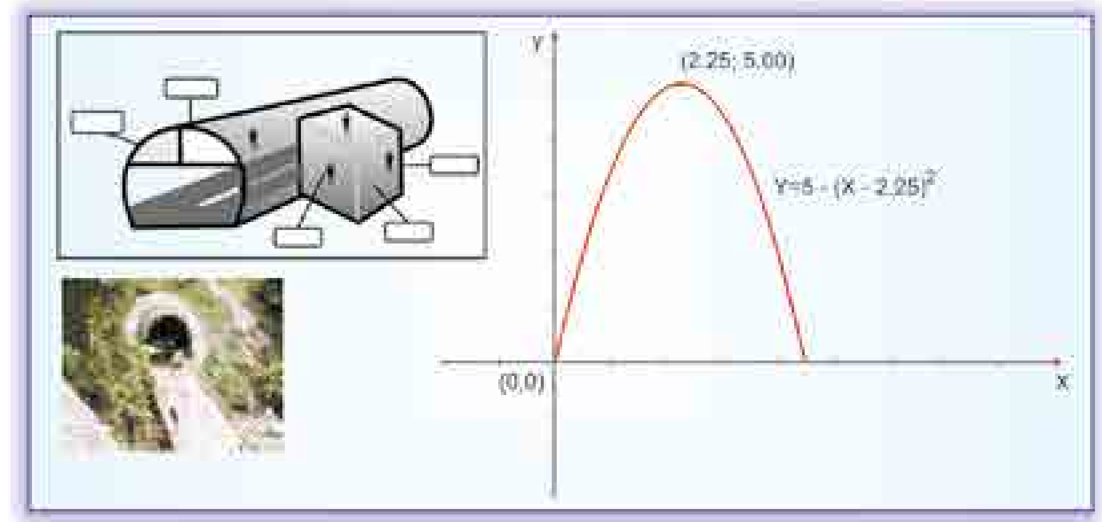
5. Y = Tan (x)

Como aplicación al tema desarrollado, con un compañero resolvemos las siguientes situaciones, discutimos el resultado con los de otros compañeros hasta ponernos de acuerdo y al final compartimos con el profesor para corregir posibles falencias.

1. Supongamos que en el proyecto de la LÍNEA, el túnel piloto, que será de una longitud de 8580 metros, deberá tener un diámetro de 4.5 metros como máximo y una altura de 5 metros a lo sumo (datos tomados de "EL TIEMPO", en su edición del 30 de julio de 2005). En la figura siguiente, y a la izquierda, se visualizan un esquema del túnel y una panorámica de la forma como se verá la boca de entrada una vez concluida la obra.

   Un modelo matemático que describe aproximadamente la boca del túnel con las especificaciones preestablecidas, es la parábola cuya ecuación es:

   $(X - 2.25)^2 = -(Y - 5)$, como se ilustra a la derecha de la gráfica.



De acuerdo con lo expuesto, hallar el área de la boca del túnel usando el cálculo integral. (14.9 metros cuadrados, aproximadamente).

2. ¿Qué tipo de herramientas tecnológicas utilizan los ingenieros para los cálculos y diseños de obras de esta envergadura?

ESTUDIO Y ADAPTACIÓN DE LA GUÍA

GUÍA 5

CÁLCULO DE ÁREAS PLANAS MÁS COMPLEJAS Y DEL VOLUMEN DE SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN POR INTEGRACIÓN

El Airbús, gigante de los cielos, tendrá capacidad para 555 pasajeros en su versión estándar y hasta 800 con todos los asientos en clase turista.
Tendrá dos pisos a todo lo largo, cada uno con dos pasillos, que se conectarán entre sí por dos grandes escaleras. ¿Increíble verdad?

Las matemáticas, y especialmente el Cálculo infinitesimal, han hecho posible esta maravilla tecnológica, cuyo vuelo de ensayo se efectuó en abril de 2005.

INDICADORES DE LOGRO

- Interpreta correctamente los problemas sobre áreas y dibuja aproximadamente las fronteras: superior, inferior y laterales
- Identifica el elemento diferencial y calcula el área mediante la integral definida
- Reconoce la curva cuya rotación sobre el eje x genera un sólido de revolución y lo dibuja aproximadamente
- Establece el elemento diferencial adecuado y calcula el volumen usando la integral definida
- Identifica la diferencia entre trabajo en grupo y trabajo en equipo. (TRABAJO EN EQUIPO)
- Demuestra una actitud abierta, propositiva y proactiva frente al trabajo en grupo.
- Comparte la información y la experiencia con los demás
- Concierta con el grupo los objetivos y métodos de trabajo
- Asume roles, responsabilidades y compromisos acordes a sus capacidades y las necesidades del grupo
- Evalúa colectivamente, de manera crítica y reflexiva los resultados alcanzados por el grupo
- Coopera con los otros, para lograr los resultados esperados por el grupo

Con los compañeros del subgrupo leemos y analizamos el siguiente contenido:

En esta guía se retoma la competencia laboral general **Trabajo en Equipo**, cuya importancia es innegable porque en la actualidad, y en gran parte a causa de la globalización, la necesidad de reducir costos llevó a las organizaciones a pensar en equipos multidisciplinarios como una forma de trabajo habitual.

Alcanzar y mantener el éxito en las organizaciones modernas requiere talentos prácticamente imposibles de encontrar en un solo individuo.

Las nuevas estructuras de las organizaciones, con menos niveles jerárquicos, requieren una interacción mayor entre las personas, que sólo puede lograrse con una actitud cooperativa y no individualista.

Pero la necesidad de trabajar en equipo no es tan nueva: en el tiempo de las cavernas, los hombres trabajaban en equipo, según los antropólogos. Quien tenía buenos ojos era el vigía que esperaba descubrir a la presa. Quien tenía buena puntería él era el que manejaba el arma. Quien era buen corredor era el que perseguía al animal herido; otro lo cargaba; otro lo destazaba. En fin, cada uno aportaba de acuerdo con su propia habilidad. Y todos, por igual, compartían los resultados: comerse al animal cazado.

En un equipo así es precisamente como las cosas funcionan. El líder conoce la habilidad diferencial de cada uno, e impulsa esa habilidad. Esa diversidad (no homogeneidad) es lo que hace grande y fuerte al equipo.

Recordemos, como ya se expresó en guía anterior, "Trabajo en Equipo" no significa solamente "trabajar juntos". Trabajo en Equipo es una forma de pensar diferente, es un camino ganador que las organizaciones han descubierto en los últimos años para hacer que cada integrante se **comprometa** realmente con los objetivos de esa organización. Un buen ejemplo es un conjunto musical, en el cual, lo que realmente importa, es que los músicos sepan **tocar juntos**.

Los equipos deben aprender a explotar el potencial de muchas mentes para ser más inteligentes que una mente sola. Tal sentimiento puede formularse con una frase como: 'Ninguno de nosotros es más inteligente que todos nosotros'. Y el espíritu del equipo al enfrentar cada cuestión o desafío es: 'Todos nosotros contra el problema, y no los unos contra los otros', como afirma Abel Cortese, especialista en inteligencia emocional.

A

Procuro desarrollar las siguientes cuestiones, requeridas para encarar el tema de esta guía. Si tengo dificultades, consulto en las fuentes adecuadas.

- ¿Cuáles son las gráficas de Y=0, X=3 y X=-2?
- Si Y=F(x), ¿cómo podemos hacer una aproximación de su gráfica?
- Resuelva $\int_{1}^{-2} 3x^2 dx$
- ¿Cuáles son las fórmulas de la geometría que permiten calcular el área de un círculo y el volumen de un cilindro?
- Dibuje las gráficas correspondientes a las funciones $y = x^2 + 1$ y $y = -x^2 + 3$. Resalte la superficie limitada por las dos curvas. ¿En cuáles puntos se intersectan las dos gráficas?
- En un diálogo entre los compañeros de subgrupo y de acuerdo al conocimiento que tenemos de ellos, elaboramos una lista para cada uno, que contenga las actitudes, aptitudes y destrezas que puedan ser tenidas en cuenta para desarrollar la siguiente guía, trabajando en equipo.

B

Con los compañeros del subgrupo leemos, analizamos y anotamos en los cuadernos de matemáticas lo que aparece en el recuadro verde y si lo requerimos volvemos a desarrollar los ejemplos que aparecen resueltos, con la finalidad de afianzar conceptos.

Como se vio en la guía anterior, el área bajo una curva puede descomponerse en rectángulos cuya base se va estrechando. En el paso al límite, cuando el incremento de x tienda a cero, los rectángulos tendrán base dx y altura F(x). Por lo tanto el área podrá calcularse mediante la integral definida.

Los pasos que deben tenerse en cuenta para plantear la integral definida que proporciona el valor del área son:

1. Trazar un diagrama en el que figuren: (a) el área a determinar, (b) una franja representativa y (c) el rectángulo genérico. Para ello tomaremos la base como dx (ó dy) y la altura como Y (ó como X).

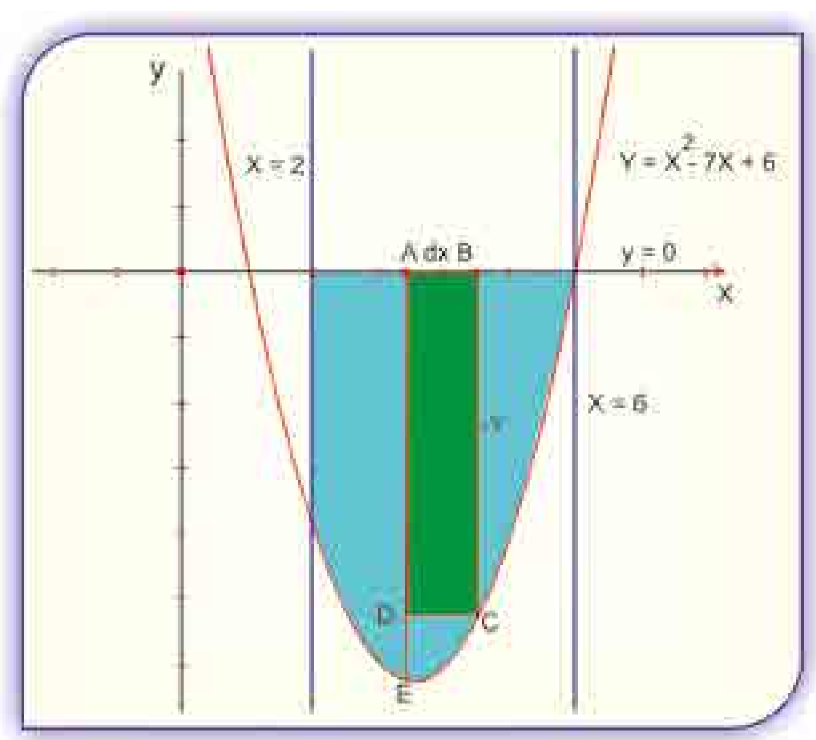
2. Hallar el área del rectángulo genérico, aplicando la conocida fórmula: base por altura.

3. Se resuelve la integral planteada.

Ejemplo1: hallar el área limitada por $Y = X^2 - 7X + 6$, el eje X y las rectas X=2 y X=6.

Solución: de acuerdo con el paso 1, en la figura siguiente se ven la gráfica de la función (la curva de color rojo), las rectas X = 2 y X = 6, una franja representativa (ABCE) y el rectángulo genérico (ABCD) que tiene por altura Y (la función) y por base la diferencial de X (dx).

Para el paso 2, se halla el área del rectángulo genérico: Área del rectángulo ABCD = -Ydx (base por altura). Nótese que Y es negativa porque está por debajo del eje horizontal.



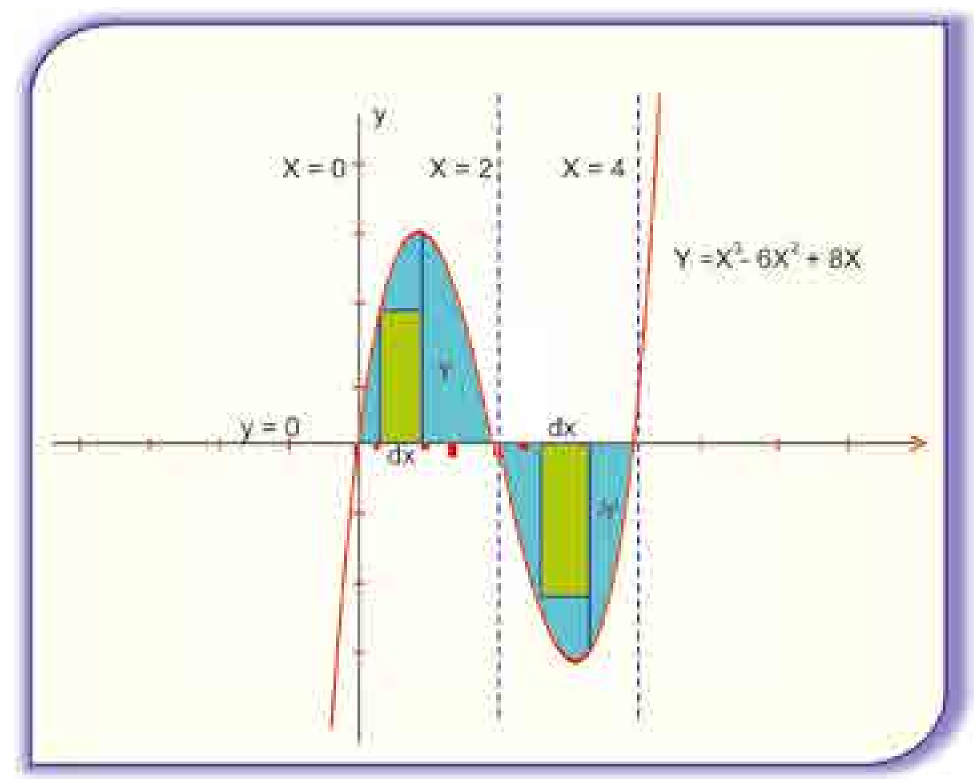
En el paso 3: $Área = \int_2^6 -(X^2 - 7X + 6)dx = \left[-\frac{X^3}{3} + \frac{7X^2}{2} - 6X\right]_2^6$. Luego:

$$Área = \left[-\frac{6^3}{3} + \frac{7(6^2)}{2} - 6 * 6\right] - \left[-\frac{2^3}{3} + \frac{7(2^2)}{2} - 6 * 2\right].$$ O sea:

$$Área = (-72 + 126 - 36) - (-\frac{8}{3} + 14 - 12) = \frac{56}{3}$$ unidades cuadradas.

Ejemplo 2: hallar el área comprendida entre $Y = X^3 - 6X^2 + 8X$ y el eje X.

Solución: de manera similar, se siguen los pasos indicados antes, con la diferencia de que en el problema no se dan las fronteras laterales. Pero al trazar la gráfica de la función se ve que es preciso calcular los puntos de corte de la curva con el eje horizontal, lo que se logra haciendo Y = 0. Al resolver la ecuación resultan los valores requeridos, así: $0 = X^3 - 6X^2 + 8X \Rightarrow X(X-2)(X-4) = 0 \Rightarrow X = 0, X = 2, X = 4$, que son las fronteras laterales. En la gráfica siguiente se ven esos elementos, incluso las franjas y los rectángulos correspondientes:



Como hay dos superficies, una por encima y otra por debajo del eje x, se deben considerar los dos rectángulos genéricos cuyas áreas son Ydx y -Ydx, respectivamente. Y estableciendo las dos integrales, resulta:

$$Área = \int_0^2 (x^3 - 6x^2 + 8x)dx + \int_2^4 -(x^3 - 6x^2 + 8x)dx \text{ , o sea:}$$

$$Área = \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2\right]_0^2 + \left[-\frac{x^4}{4} + 2x^3 - 4x^2\right]_2^4 \text{. Luego:}$$

$$Área = (4 - 16 + 16) + [(-64 + 128 - 64) - (-4 + 16 - 16]\cdot$$

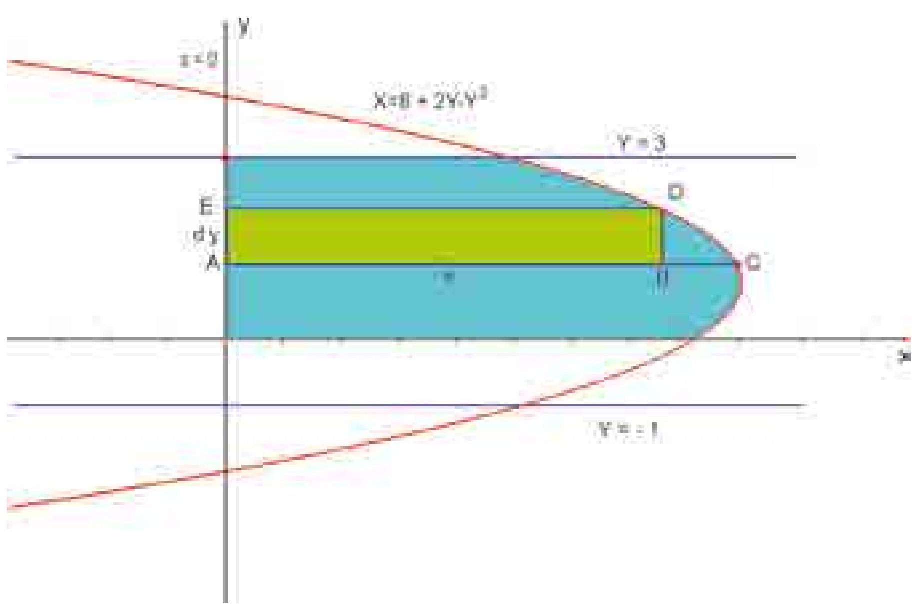
$$Área = 4 + 4 = 8 \text{ unidades cuadradas.}$$

Ejemplo 3: hallar el área comprendida entre la parábola $X = 8 + 2Y - Y^2$, el eje Y y las rectas Y=-1 y Y=3.

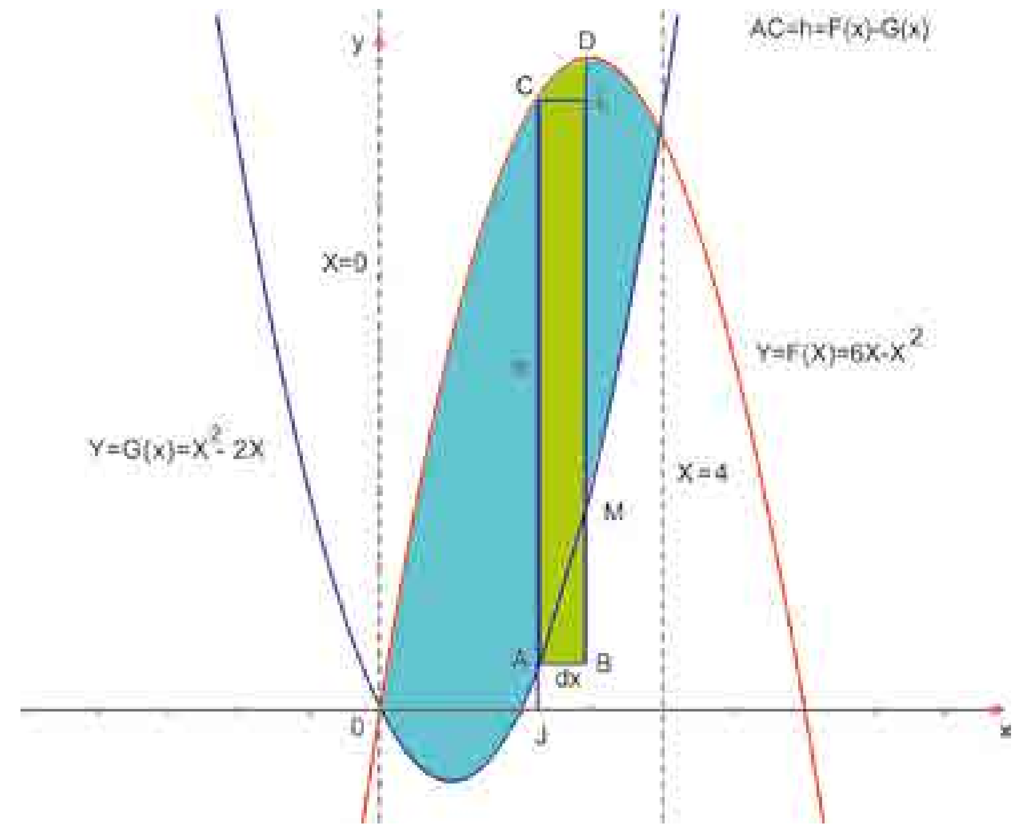
Solución: se trata de una parábola de eje horizontal y cuyas ramas se abren a la izquierda, razón por la cual es más cómodo tomar la franja representativa ABCDE y el rectángulo genérico ABDE en posición horizontal de manera que la altura del rectángulo es X y su base es dy, como se ve en la figura que hay más abajo. Por tanto:

$$Área = \int_{-1}^3 Xdy = \int_{-1}^3 (8 + 2Y - Y^2)dx = \left[8Y + Y^2 - \frac{Y^3}{3}\right]_{-1}^3 \text{.Luego:}$$

$$Área = 24 + 9 - 9 - (-8 + 1 + \frac{1}{3}) = \frac{92}{3} \text{ unidades cuadradas.}$$



Ejemplo 4: hallar el área comprendida entre $Y = 6X - X^2$ y $Y = X^2 - 2X$, cuya gráfica es:



Solución: se trata de una superficie OAMKDC, limitada por dos curvas: la de color rojo que corresponde a la función $F(x) = Y = 6X - X^2$ y la azul a $G(x) = Y = X^2 - 2$.

Para obtener las fronteras laterales, es preciso resolver el sistema simultáneo conformado por las dos ecuaciones, así:

(1) $Y = 6X - X^2$

(2) $Y = X^2 - 2X$

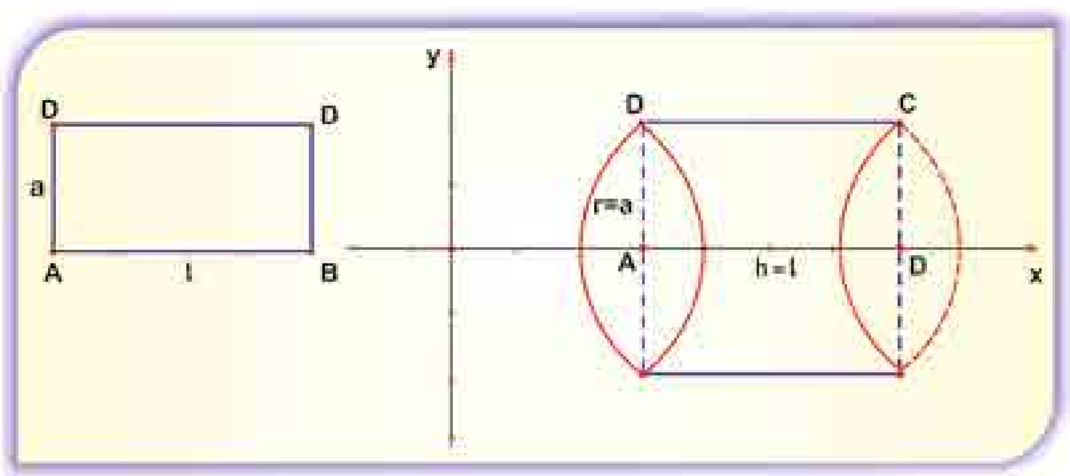
$6X - X^2 = X^2 - 2X \Rightarrow 2X^2 - 8X = 0 \Rightarrow 2X(X - 4) = 0 \Rightarrow X = 0 \vee X = 4$ que son las fronteras laterales.

La franja representativa es la AMDC y el rectángulo genérico es ABLC que tiene por base dx y por altura h = AC = JC - JA. Pero JC es la misma F(x) y JA es igual a G(x), como se ve en la figura. Por tanto, h = F(x) - G(x). Luego:

$$Área = \int_0^4 h\,dx = \int_0^4 (6X - X^2) - (X^2 - 2X)dx = \int_0^4 (8X - 2X^2)dx = \left[4X^2 - \frac{2X^3}{3}\right]_0^4$$

$$Área = 4(4^2) - \frac{2(4^3)}{3} = 64 - \frac{128}{3} = \frac{64}{3}$$ unidades cuadradas.

Cálculo del volúmen de sólidos de revolución



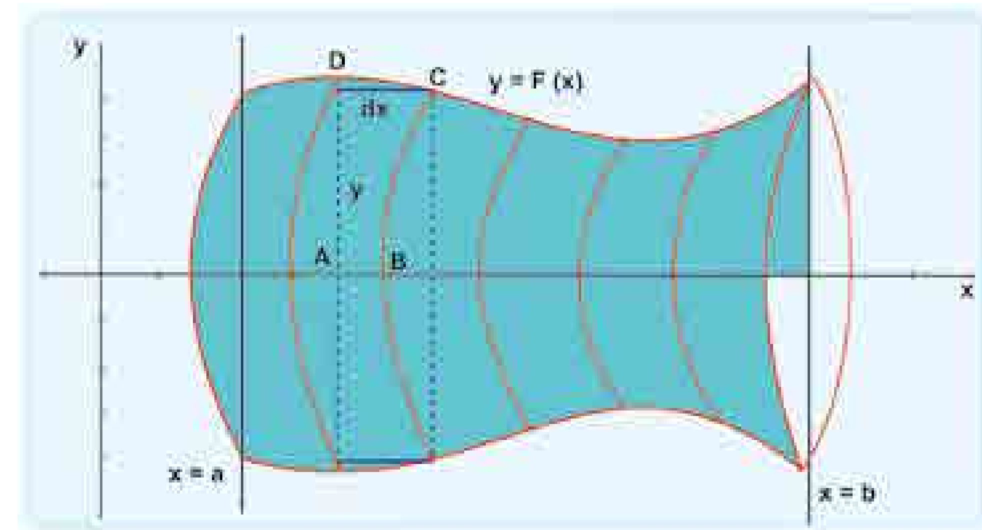
Un sólido de revolución se origina por la rotación de un área plana alrededor de un eje de revolución. Por ejemplo, si ABCD es un rectángulo cuya base es l y cuya altura es a (gráfica de la izquierda). Si se hace rotar dicho rectángulo sobre uno de sus lados en ángulo de 360º alrededor de un eje (el eje x en este caso), se genera un sólido de revolución llamado cilindro, que tiene como radio de la base un lado del rectángulo y por altura el otro lado. (Gráfica de la derecha).

Si se desea calcular el volumen V del cilindro, se usa la fórmula: Área de la base del cilindro multiplicada por su altura h. Y como la base es un círculo de radio r, entonces $V = \pi r^2 h$, que es la conocida expresión de la geometría.

Cálculo del volúmen mediante la integración

En la guía 4 de esta misma unidad se vio que el área bajo una curva se puede descomponer en franjas rectangulares de ancho muy pequeño, tendiendo a 0 y que por sumatoria de las áreas de todos esos rectángulos se llegaba a encontrar el valor del área bajo la curva, cuando el número de rectángulos tiende al infinito. Con un razonamiento similar, se puede pensar en que los rectángulos de ancho muy pequeño (tendiendo a o) se hacen girar alrededor de un eje en un ángulo de 360º para

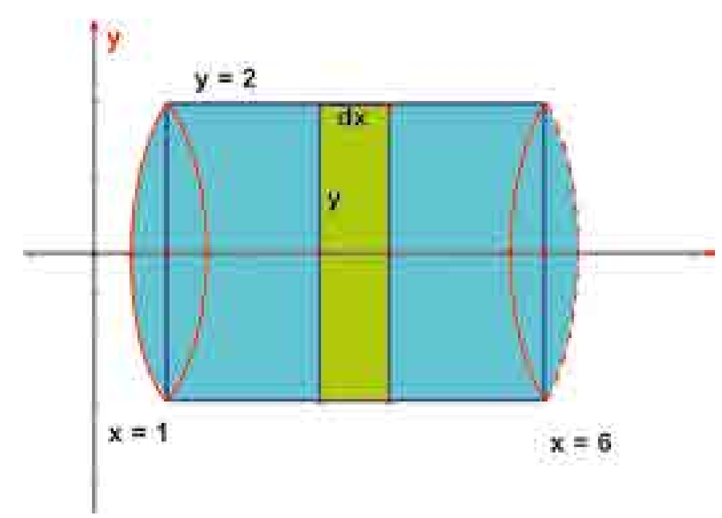
generar cilindros de altura muy pequeña, algo así como "rebanadas", y al hacer la sumatoria de los volúmenes de todas esas rebanadas, cuando su número tiende al infinito, da como resultado el volumen V del sólido. La siguiente figura ilustra el razonamiento:



La gráfica de la función y = F(x), en el intervalo $[a,b]$ se descompone en rectángulos como el ABCD que al rotar alrededor del eje x genera un cilindro que tiene por altura dx y por radio de la base a F(x). El volumen de ese cilindro genérico es $= \pi y^2 dx$. Y de acuerdo con lo dicho antes, el volumen V del sólido es:

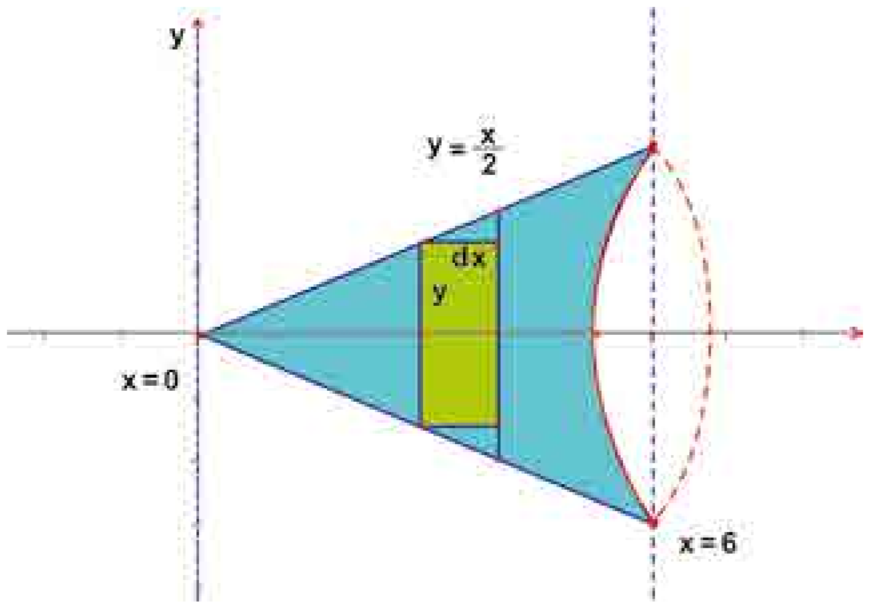
$$V = \lim_{n \to \infty} \sum_{j=1}^{n} \pi\left(f(x_j)\right)^2 dx_j \Leftrightarrow V = \int_a^b \pi\left(F(x)\right)^2 dx.$$

Como aplicación, calcular el volumen del sólido generado por F(x) = Y = 2 en el intervalo $[1,6]$, como se muestra en la figura:



Solución: aquí, el rectángulo genérico (el de color verde) tiene por dimensiones dx y 2, y su rotación origina un pequeño cilindro cuyo volumen es πy^2. Por tanto: $V = \int_1^6 \pi y^2 dx = \int_1^6 \pi(2)^2 dx = \int_1^6 4\pi dx = \left[4\pi x\right]_1^6 = 4\pi(6) - 4\pi(1) = 20\pi$ unidades cúbicas, como se puede comprobar aplicando la fórmula para calcular el volumen de un cilindro de altura 5 y radio de la base igual a 2, así: $V = \pi r^2 h = \pi(4)(5) = 20\pi$ unidades cúbicas, igual al resultado anterior.

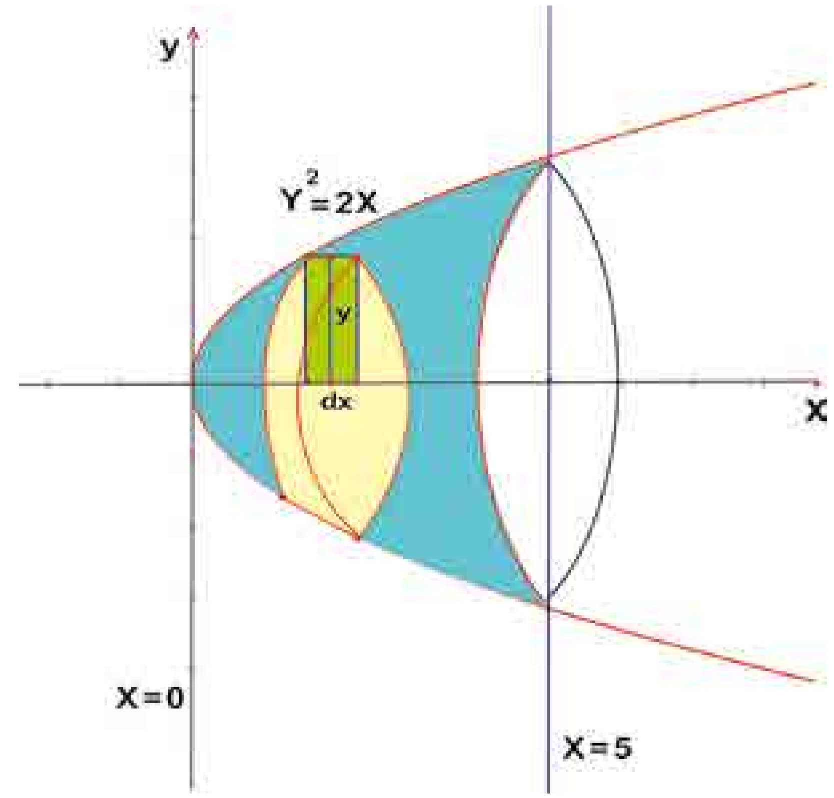
Otro ejemplo: hallar el volumen generado por la rotación de la recta $y = \frac{x}{2}$ cuando gira alrededor del eje x en el intervalo $[0,6]$, como se ve en la gráfica:



Solución: en este caso el rectángulo genérico (el de color verde) tiene por dimensiones dx y $\frac{x}{2}$ y su rotación origina un pequeño cilindro cuyo volumen es $\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2$. Por tanto: $V = \int_0^6 \left(\frac{\pi x^2}{4}\right) dx = \left[\frac{\pi x^3}{12}\right]_0^6$. Luego:

$V = \frac{\pi(6)^3}{12} = \frac{216\pi}{12} = 18\pi$ unidades cúbicas, como se puede comprobar aplicando la fórmula para hallar el volumen de un cono de altura 6 y radio de la base igual a 3, así: $V = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi(3)^2 * 6}{3} = \frac{54\pi}{3} = 18\pi$ unidades cúbicas, igual al resultado anterior.

Otro ejemplo: hallar el volumen generado por la rotación sobre el eje x de la función $Y = +\sqrt{2X}$ en el intervalo $[0,5]$, como se ve en la gráfica:



Solución: el rectángulo genérico (el de color verde) al girar alrededor del eje x engendra un cilindro que tiene por altura dx, por radio de la base a y, con un volumen de πy^2. Por tanto, el volumen V del sólido está dado por:

$V = \int_0^5 \pi y^2 dx = \int_0^5 2\pi x dx = \left[\pi x^2\right]_0^5 = 25\pi$ unidades cúbicas.

Concluida la revisión de los ejercicios habrán notado que algunos de los integrantes del subgrupo son más hábiles en estos menesteres. Si trabajamos en equipo, podemos imaginar que cada uno de los integrantes somos eslabones de una cadena en donde, por lo general, alguno de nosotros, como mínimo, resulta menos fuerte que los otros, pero con la colaboración de todos es probable que se haya evitado la ruptura de la cadena y en consecuencia todos alcanzamos las metas, pues trabajando en equipo "el todo es mayor que la suma de las partes", aunque se viole un conocido principio de las matemáticas. Así, pues, para trabajar el siguiente paso de la guía, tengamos en cuenta los resultados del trabajo hecho en A, en relación con los compañeros.

C

Con el fin de afianzar conceptos y adquirir agilidad para graficar funciones, identificar elementos y manejar la integral definida para el cálculo de áreas y volúmenes, desarrollamos en equipo los siguientes planteamientos:

De acuerdo con los datos, graficamos los elementos que se dan (las fronteras) en cada problema e identificamos el área del rectángulo genérico. Luego, calculamos por integración el área y si es posible comprobamos el resultado (que está dado en unidades cuadradas) mediante fórmulas de la geometría:

1. La recta Y = 2X, el eje X y la recta X = 4 (16)
2. La recta X + Y = 10, el eje de las X y las rectas X=1 y X=8. (38,5)
3. $Y = X^2$, el eje X y las rectas X=2, X=4; (56/3)
4. Y = 9 - X2, Y=0, X=0, X=3; (18)
5. Y = X3 + 3X2 +2X, Y=0, X=-3, X=3; (54)

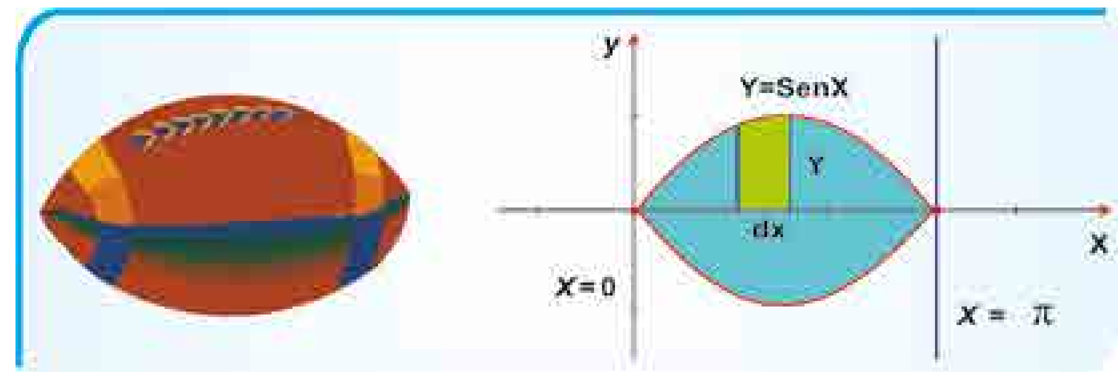
Acorde con los datos, graficamos los elementos que se dan, visualizamos el sólido de revolución, identificamos el cilindro genérico y su volumen (que está dado en unidades cúbicas); luego calculamos el volumen del sólido mediante la técnica de la integración.

1. $Y = 2X^2$, X = 0, X =2, rotación sobre el eje x. (128Pi/5)
2. $Y^2 = X^3$, X = 0, X = 2; rotación sobre el eje x. (4Pi)
3. $4X^2 + 9Y^2 = 36$, rotación sobre el eje x. (16Pi)

D

Como aplicación a los conocimientos que nos ha aportado el contenido de la guía, desarrollamos en equipo el siguiente problema:

Supongamos que ustedes tienen una microempresa que distribuye implementos deportivos y entre ellos balones de fútbol americano, que tienen la forma de la figura de la izquierda de la gráfica. Este sólido de revolución se genera cuando la región plana correspondiente a Y=SenX rota sobre el eje x en el intervalo $[0,\pi]$, como se muestra a la derecha de la imagen que se ve enseguida:



Para efectos de determinar cuál es la caja de embalaje más económica, es preciso conocer cuál es el volumen de cada balón, aplicando cálculo integral. (Pi^2/2 unidades cúbicas).

ESTUDIO Y ADAPTACIÓN DE LA GUÍA

UNIDAD 7

NOCIONES DE ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD

Además de la certeza de la muerte, pocos aspectos de nuestra vida eluden la influencia del azar. Un agrupamiento impredecible de genes determina nuestra constitución física; un paso en falso inadvertido puede llevarnos al hospital, incapaces de controlar el azar, tratamos de evaluar la probabilidad de que ocurra un suceso en particular.
Los juegos de azar llevaron a matemáticos como Tartaglia y Cardano a presentar sagaces análisis sobre problemas de juego; pero fueron Pascal y Fermat, quienes sentaron las bases de la teoría de probabilidades.

LOGROS

- Revisa y afianza los conceptos relativos a la teoría de conjuntos con las operaciones entre ellos
- Maneja los conceptos básicos de la teoría combinatoria y los aplica correctamente para resolver ciertos problemas cotidianos
- Recuerda las nociones fundamentales de la estadística para interpretar los conjuntos de datos que suministran los medios de comunicación
- Define y aplica adecuadamente los conceptos básicos de la teoría de probabilidad
- Usa adecuadamente la información para enfrentar situaciones. GESTIÓN DE LA INFORMACIÓN
- Evalúa y compara sus procesos con otros similares, para innovar y mejorar. REFERENCIACIÓN COMPETITIVA
- Resuelve problemas en forma acertada y oportuna. SOLUCIÓN DE PROBLEMAS
- Analiza, elige y pone en marcha alternativas de solución. TOMA DE DECISIONES

GUÍA 1

LOS CONJUNTOS Y SUS OPERACIONES

George Cantor, nacido en Rusia en 1845 y muerto en Alemania en 1918, entre 1872 y 1898 crea la teoría de conjuntos que permite reconstruir prácticamente toda la matemática.

En la actualidad, los conjuntos han permitido crear el álgebra booleana que son la matemática del 1 y el 0, tan en boga hoy, toda vez que constituyen el lenguaje de los computadores.

INDICADORES DE LOGRO

- Describe correctamente conjuntos por extensión y por comprensión
- Diferencia entre elemento, subconjunto y conjunto y maneja las relaciones entre ellos
- Define y realiza las operaciones: unión, intersección, diferencia, diferencia simétrica y complemento
- Establece y maneja las propiedades del álgebra de conjuntos
- Demuestra interés por actualizar su información de manera constante. GESTIÓN DE LA INFORMACIÓN
- Identifica la información requerida para ampliar su conocimiento de una situación o problema
- Ubica las distintas fuentes de información disponibles
- Recoge organizadamente la información
- Analiza la información recolectada
- Utiliza la información para tomar decisiones y emprender acciones
- Reconoce la información resultante de la experiencia de otros
- Organiza y archiva la información recolectada

En esta unidad revisaremos nuestros conocimientos sobre conjuntos con la finalidad de utilizarlos en el estudio elemental de la teoría combinatoria y para introducirnos en el tema de las probabilidades.

A

Para determinar mi conocimiento sobre los conjuntos, resuelvo lo siguiente; si tengo dificultades, consulto las fuentes disponibles y comparto mis respuestas con los compañeros del subgrupo para ponernos de acuerdo y poder afrontar con éxito el contenido de la guía.

1. ¿Qué es un conjunto?
2. ¿De qué maneras se puede describir un conjunto?
3. ¿Qué es el conjunto vacío?
4. ¿Qué es el conjunto universal?
5. ¿Qué elementos conforman la unión de dos conjuntos?
6. ¿Cuáles elementos integran la intersección de dos conjuntos?

B

Con un compañero, leemos y analizamos los siguientes conceptos, resolvemos las situaciones y preguntas que se nos plantean y si lo consideramos necesario, dibujamos los diagramas que nos sirvan para comprender los conceptos.

Los conjuntos están relacionados con el proceso de contar; los conceptos geométricos y aritméticos pueden ser formulados de manera clara y concisa a través de los conjuntos; facilitan el desarrollo de los conceptos más abstractos de las matemáticas, como el álgebra lineal, el álgebra moderna, etc.

Las ideas de **conjunto y elemento** son primitivas y no se definen, aunque podemos describirlas de modo intuitivo. Un CONJUNTO lo entendemos como una colección de objetos distinguibles y bien definidos. Los objetos (números, letras, puntos, etc.), que constituyen un conjunto son los miembros o **elementos** del conjunto.

Los conjuntos se simbolizan con letras mayúsculas A, B, C... y los elementos con minúsculas a, b, c...., números, etc.

Ejemplos:

1. A = {1, 3, 5, 7} (que se lee "el conjunto A integrado por 1, 3, 5, 7") y significa que el conjunto A se compone de los cuatro primeros números naturales impares.

2. B = {a, b, c} quiere decir que los elementos del conjunto B son las tres primeras letras del alfabeto.

3. C = {x / x es una vocal} (que se lee "el conjunto C integrado por los elementos x tales que x es una vocal), está compuesto por {a, e, i, o, u}.

4. D = {y / y es un número natural par} está compuesto por {2, 4, 6, 8,...2n}.

En los ejemplos anteriores:

a) Para indicar que un determinado objeto es miembro o elemento del conjunto dado, se emplea el símbolo "$\in$" llamado de pertenencia. Así en 1. podemos escribir $5 \in A$ (que se lee 5 le pertenece a A ó 5 es elemento de A); también, $a \in B$, $u \in C$, $12 \in D$.

El símbolo "$\notin$" se lee "no pertenece" ó "no es elemento de". Por ejemplo, $13 \notin A$, 3 D$\notin$ (13 no pertenece a A, 3 no es elemento de D).

b) En los ejemplos 1. y 2. no surgen dudas de si un miembro pertenece o no a cada conjunto. Son conjuntos bien definidos en el sentido de que podemos afirmar de modo inequívoco si un objeto dado es o no elemento de los conjuntos considerados, porque se ha dado la lista explícita de los elementos de los conjuntos, y diremos entonces que A y B están determinados por **extensión**. En los casos 3. y 4. se ha establecido una regla que permite decidir si un objeto es miembro o no de los conjuntos, y decimos que C y D se han determinado por **comprensión.**

c) Los conjuntos A, B y C son **finitos**, porque el proceso de contar sus elementos termina; en cambio D es un conjunto infinito, porque el conteo de sus elementos no termina.

Dados los conjuntos $A = \{x \in \Re / X^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0\}$

y $B = \{x \in \Re / (X+3)(x-3) = X^2 - 9\}$, decidir sin son finitos o infinitos.

RELACIONES ENTRE CONJUNTOS

Subconjunto. Un conjunto B es subconjunto de un conjunto A, lo que se indica por B $\subset$ A (Se lee B está contenido en B ó A es subconjunto de B), si todo elemento de B es también elemento de A, es decir, $x \in B \rightarrow x \in A$ (ver diagramas de Venn en las figuras 1 y 2 más adelante).

Ejemplos:

$B = \{6,9,12\} \wedge$ A={x/x es múltiplo de 3} $\rightarrow B \subset A$

G = {x/x es un número divisible por 3} $\wedge$ H = {x/x es un número natural} $\rightarrow$ G $\subset$ H ó G es subconjunto de H. También se puede afirmar que H $\supset$G que se lee H contiene a G ó H es superconjunto de H.

D = {a, m, p}$\wedge$F = {p, a, m}$\rightarrow$ D $\subseteq$ F. En este caso los conjuntos tienen los mismos elementos, se dice que D es subconjunto impropio de F.

Igualdad de conjuntos. Dos conjuntos A y B son iguales sólo si todos los elementos de A le pertenecen a B y todos los elementos de B le pertenecen a A, ó sea,

A=B $\leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$

Ejemplo: si A = {x/x es una vocal de la palabra "murciélago"} y B = {a, e, i, o, u}, entonces A y B son conjuntos iguales.

CONJUNTOS ESPECIALES

Conjunto vacío. Es el que carece de elementos y se simboliza por { } ó por ϕ. Por ejemplo, el conjunto de los hombres mayores de 200 años que viven actualmente.

Conjunto universal. Cuando se habla o se piensa acerca de los conjuntos, es conveniente saber que los miembros de un conjunto dado pertenecen a una "población" determinada, que es el conjunto universal o referencial. Por ejemplo, en un momento dado, el universal o referencial puede ser ó su colegio, ó el nivel 10, ó el grado undécimo. El universal se denota con U.

Conjunto de partes. Dado un conjunto A, el conjunto de partes de A es otro conjunto cuyos elementos son todos los subconjuntos de A, y su número es 2^n, siendo n el número de elementos, o sea el cardinal del conjunto.

Ejemplo: si A={a, b, c}, entonces P(A)={{a}, {b}, {c}, {a, b}, {a, c}, {b, c}, {a, b, c}, { }}. (En teoría coordinatoria usaremos este concepto).

Obsérvese que el conjunto es subconjunto de sí mismo y el conjunto vacío es subconjunto de todos los conjuntos. Además, un conjunto cuyos elementos son también conjuntos se llama UNA FAMILIA DE CONJUNTOS .

Conjunto unitario. Es el que sólo tiene un elemento. Ej: A={x/x es número primo par}. En efecto, $A = \{2\}$.

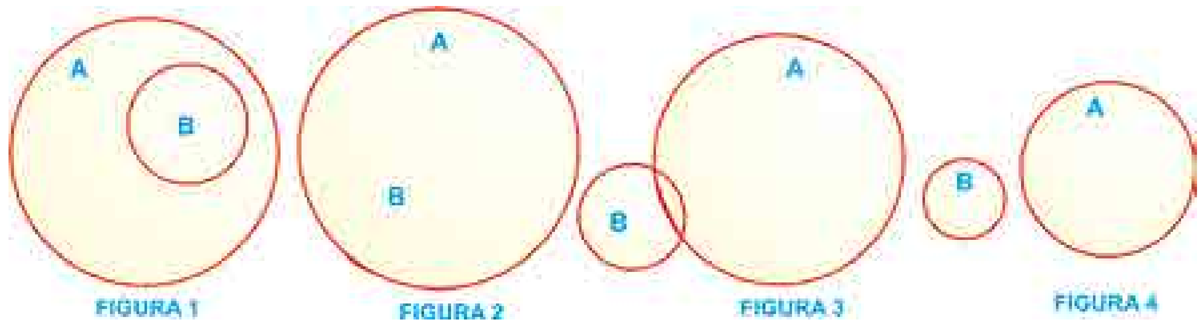
Diagramas de VENN: Llamados también de EULER, son una manera esquemática de representar los conjuntos y los conceptos relacionados con ellos. Se constituyen en un auxiliar didáctico muy valiosos para visualizar las relaciones de pertenencia, inclusión y contiene a....Por lo general, el conjunto universal se representa mediante un rectángulo y los subconjuntos mediante regiones cerradas del plano, elipses o círculos, como se verá adelante.

Conjuntos disyuntos. Son aquellos que NO TIENEN elementos comunes (Figura 4).

Conjuntos secantes. Son aquellos que TIENEN elementos comunes (Figuras 1, 2 y 3).

Conjuntos comparables. Cuando uno de los conjuntos es subconjunto del otro (Figuras 1 y 2).

Las definiciones anteriores se visualizan así:



Dados los conjuntos:

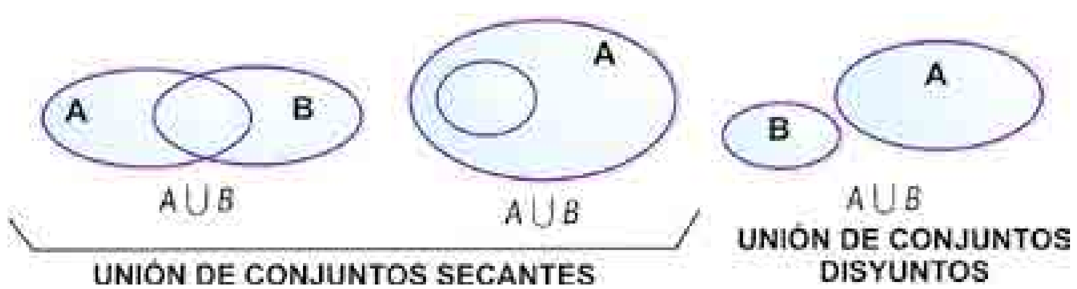
A={x es una letra de la palabra "acto"}; B={x es una letra de la palabra "acato"}; C={x es una letra de la palabra "taco"}; D=}x es una letra de la palabra "cota"}, ¿Cuáles de los conjuntos son iguales? Justificar la respuesta.

De los conjuntos ϕ, { 0 } y { ϕ } ¿se puede afirmar que son iguales? Justificar la respuesta

OPERACIONES CON CONJUNTOS

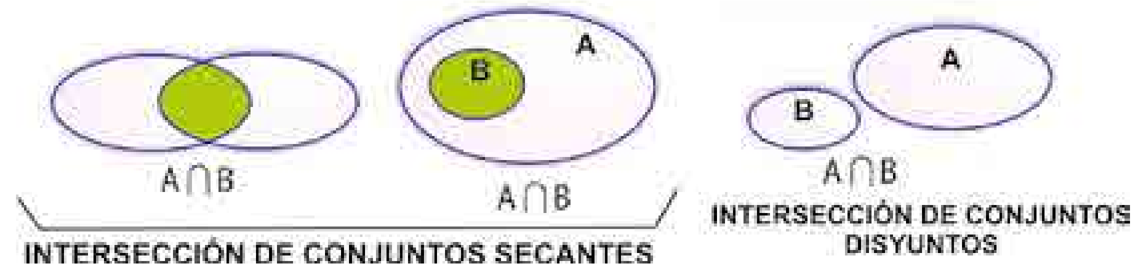
Así como los números se combinan mediante las operaciones de suma, sustracción y producto, los conjuntos se pueden combinar entre ellos para obtener otros conjuntos, a través de ciertas operaciones que satisfacen muchas de las propiedades de la adición y el producto de números.

Unión de conjuntos. La unión entre dos conjuntos A y B, que se indica por $A \bigcup B$ (se lee A unión B) está conformada por todos los elementos que están en A ó en B, o sea: $A \bigcup B = \{x / x \in A \vee x \in B\}$, como se ve en la figura siguiente, en donde $A \bigcup B$, para conjuntos secantes y disyuntos se muestra en color azul claro.



Ejemplo: A={a, b, c, d}; B={c, d, e, f} entonces $A \bigcup B$ ={a, b, c, d, e, f} (los elementos que se repiten se escriben sólo una vez).

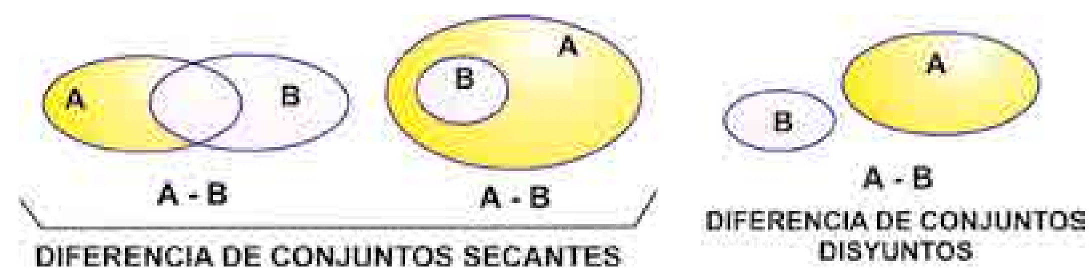
Intersección de conjuntos. La intersección de dos conjuntos A y B, que se indica por $A \bigcap B$, está conformada por los elementos comunes a los dos conjuntos, o sea: $A \bigcap B = \{x / x \in A \wedge x \in B$, como se visualiza en la figura siguiente, en donde $A \bigcap B$ corresponde a la porción de color verde; para los conjuntos disyuntos, la intersección es el conjunto vacío (ϕ).



Ejemplo: usando los conjuntos nombrados en ejemplo anterior, $A \bigcap B$ ={c, d}.

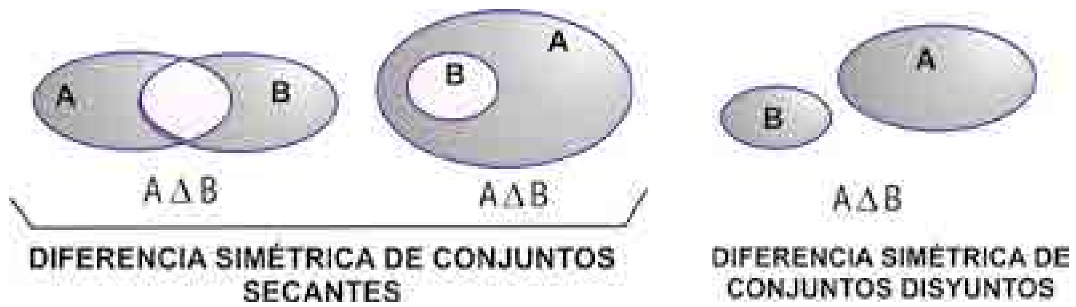
OBSERVACIÓN: AUB se llama suma lógica de los conjuntos A y B; y $A \bigcap B$ es el producto lógico de los conjuntos A y B.

Diferencia de conjuntos. La diferencia de dos conjuntos A y B, denotada por $A - B$, que se lee "A diferencia B", es el conjunto formado por los elementos que le pertenecen a A pero que no le pertenecen a B, o sea: $A - B = \{x / x \in A \wedge x \notin B\}$, como se ve en la figura, en color amarillo.



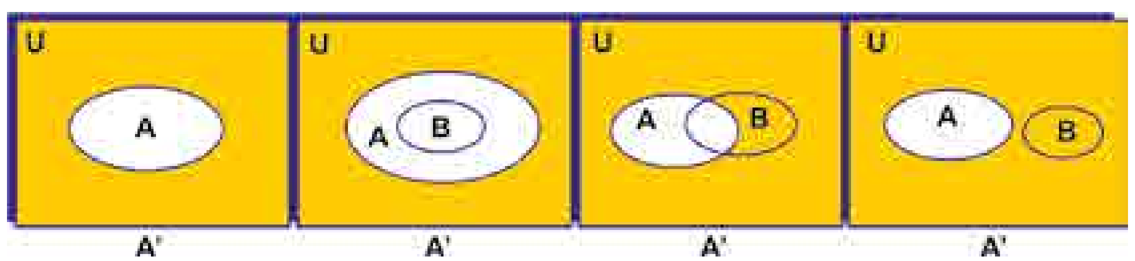
Ejemplo: A={3, 4, 5, 6}; B={4, 5, 7} $\Rightarrow$ A - B={3, 6} y B - A={7}.

Diferencia simétrica de conjuntos. La diferencia simétrica de dos conjuntos *A* y *B*, que se indica por $A \Delta B$, se lee "*A* diferencia simétrica *B*", es el conjunto formado por los elementos que le pertenecen a *A* ó a *B*, pero no a ambos, es decir: $A \Delta B = \{x / x \in (A \bigcup B) \wedge x \notin (A \bigcap B)\}$, que son las zonas grises que se ven en la siguiente figura:



Ejemplo: A={1, 2, 3, 4}; B={4, 5} ‘ A Δ B ={ 1, 2, 3, 5}.

Complemento de un conjunto. El complemento de un conjunto A con respecto al universal U, que se indica por A’ y se lee “complemento de A”, está conformado por los elementos de U que no están en A, o sea: $A' = \{x / x \notin A\}$, como se ve en la figura, en donde el complemento de A (A’) son las regiones de color mostaza:



Cardinal de un conjunto. Es el número de elementos que tiene el conjunto A y se indica por n(A). Ejemplos:

Si A={2, 3, 5} → n(A)=3; si B={x/x es un divisor de 8} → n(B)=4

En los conjuntos $U = \{x \in \mathbb{N} / 1 \leq x < 6\}$; $A = \{x \in U / x^2 = 7x - 12\}$

y B= $x \in U$ / {x es un número primo}, hallar el cardinal de:

$A \bigcup B$; $A \bigcap B$; A’; A - B; $A \Delta B$

Propiedades de las operaciones entre conjuntos

- Idempotencia: $A \bigcup A = A$ $\qquad A \bigcap A = A$
- Conmutatividad: $A \bigcup B = B \bigcup A$ $\qquad A \bigcap B = B \bigcap A$
- Asociatividad: $(A \bigcup B) \bigcup C = A \bigcup (B \bigcup C)$ $\qquad (A \bigcap B) \bigcap C = A \bigcap (B \bigcap C)$
- Distributividad: $A \bigcup (B \bigcap C) = (A \bigcup B) \bigcap (A \bigcup C)$ $\qquad A \bigcap (B \bigcup C) = (A \bigcap B) \bigcup (A \bigcap C)$

Propiedades relacionadas con los conjuntos universal y vacío

$A \bigcup U = U$ $\qquad A \bigcap U = A$

$A \bigcup \phi = A$ $\qquad A \bigcap \phi = \phi$

Propiedades con respecto al complemento

$A \bigcup A' = U$ $\qquad A \bigcap A' = \phi$

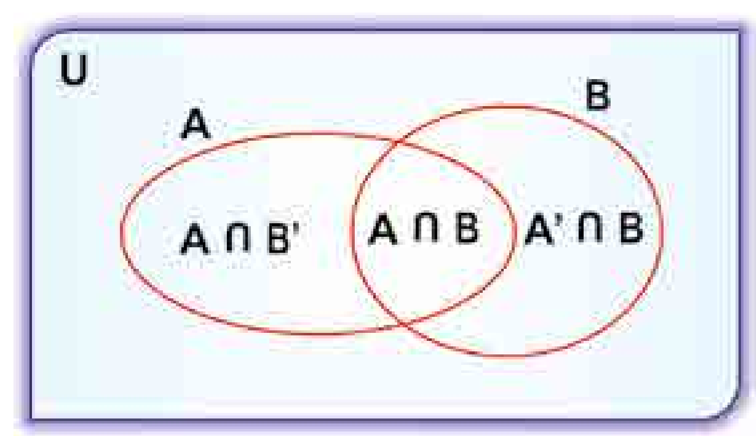
Leyes de De Morgan:

$(A \bigcup B)' = A' \bigcap B'$ $\qquad (A \bigcap B)' = A' \bigcup B'$

EL NÚMERO DE ELEMENTOS DE UN CONJUNTO

Ya se dijo que el cardinal de un conjunto A es el número de elementos de A. Se indica por n(A). Por ejemplo, si $A = \{x / x = \sqrt{9}\} \subset \mathbb{Z} \Rightarrow n(A) = 2 \because A = \{-3, 3\}$.
Si B = {x / x es un número primo y par} $\subset \mathbb{N} \Rightarrow n(B) = 1 \because B = \{2\}$.
Si se conoce el cardinal de ciertos conjuntos, es posible encontrar el cardinal de otros conjuntos que son unión, intersección, diferencia o complemento de aquellos.

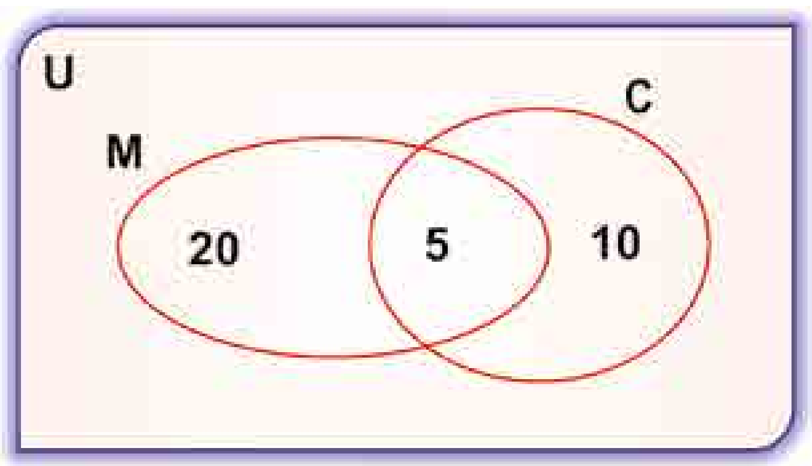
Supongamos que 40 estudiantes del colegio practican el fútbol y 30 el baloncesto. ¿Se puede deducir cuántos estudiantes practican fútbol o básquetbol? No, puesto que es preciso conocer cuántos practican los dos deportes, fútbol y básquetbol. Ahora, si conocemos que los dos conjuntos son disyuntos (no hay estudiantes que practiquen los dos deportes) la respuesta sería la suma de los dos números, o sea 40 + 30 = 70.
En general, si A y B son disyuntos, entonces **n(A U B) = n(A) + n(B).**
Si los conjuntos son secantes, como los que se muestran en la figura:



Entonces $(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$.

Ejemplo: suponga que en su grupo hay 25 estudiantes que tienen preferencia por las matemáticas y 15 por las ciencias naturales; 5 de ellos tienen preferencia por las dos asignaturas. Calcule el número de estudiantes que hay en el grupo, primero usando un diagrama de Venn y luego usando la fórmula.

Solución: se dibujan dos conjuntos M y C que sean secantes; en su intersección se escribe el 5 para representar los que prefieren matemáticas y ciencias naturales; luego se escriben 20 en M (lo que falta para completar 25) y 10 en C (lo que falta para completar 15); los resultados se deducen de la gráfica leyendo directamente, o sea: 20 + 5 + 10 = 35, como se ve en la figura:



Usando la fórmula: $n(M \cup C) = n(M) + n(C) - n(M \cap C) = 25 + 15 - 5 = 35$, resultado igual al anterior.

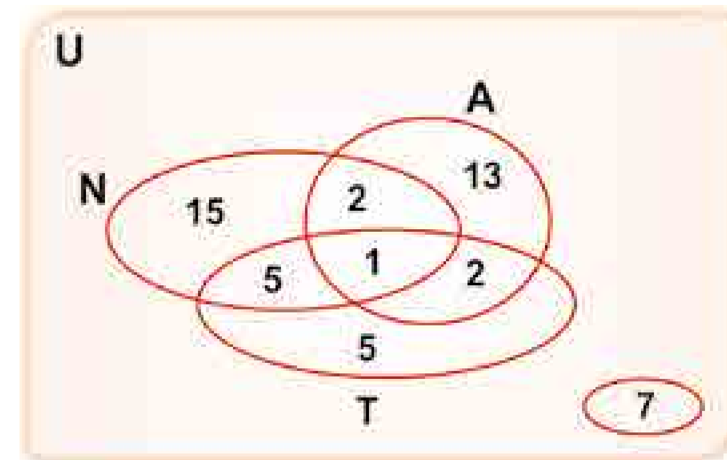
De manera similar, para tres conjuntos A, B y C que se cortan el cardinal de la unión se puede calcular mediante:

$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$.

Ejemplo: en un grupo de estudiantes se practican algunos deportes, así: 23 natación, 18 atletismo y 13 tenis. Si tres hacen natación y atletismo, 6 natación y tenis, 3 atletismo y tenis, 1 realiza los tres deportes y 7 no participan en los deportes, ¿cuantos estudiantes conforman el grupo?

Solución mediante diagramas de Venn: se dibujan los conjuntos N, A y T de modo que se corten; escribimos 1 en la intersección común; con el 2 completamos la intersección de N con A; con 5 completamos la intersección de A con T; con 2

completamos la intersección de A con T; se completa con 15 el conjunto N, con 13 el A y con 5 el T; fuera de los óvalos, pero dentro del rectángulo anotamos el 7, correspondiente a quienes no participan de ninguno de los tres deportes. La respuesta se deduce directamente de la gráfica: $n(A \cup B \cup C) = 15 + 5 + 1 + 2 + 13 + 2 + 5 + 7 = 50$, como se ve en la figura:



$n(A \cup N \cup T) = 18 + 23 + 13 - 3 - 3 - 6 + 1 = 43$. Y como hay 7 que no practican alguno de los tres deportes, el cardinal del grupo es 43 + 7 = 50.

Usando un diagrama de Venn-Euler, comprobar las leyes de De Morgan.

Para verificar el avance en el tema de estudio en la guía, resolvemos en subgrupo los siguientes planteamientos, comparamos las respuestas con las de otros subgrupos y discutimos nuestros puntos de vista hasta llegar a un consenso.

1. Escribir las afirmaciones siguientes en notación conjuntista:

1. x no pertenece a A	2. d es elemento de E
3. R contiene a S	4. H no incluye a D
5. F es subconjunto de M	6. P está contenido en K
7. C es subconjunto de G	8. y le pertenece a F

2. Sea M= {a, b, c}. Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando la respuesta:

1. $a \in M$
2. $a \subset M$
3. $\{a\} \in M$
4. $\{a\} \subset M$
5. $M \supset a$
6. $M \supset \{a\}$
7. $n(M) = 3$
8. $\phi \subset M$
9. $\{a,b,c\} \subset M$
10. $\{a,b\} \not\subset M$

3. Describa por extensión o forma tabular los siguientes conjuntos:

1. $A = \{x \in \mathbb{Z} / x^2 = 4\}$
2. $B = \{x \in \mathbb{N} / x - 2 = 5\}$
3. x es positivo y x es negativo}
4. D = {x/ x es una letra de "correcto"}
5. E= {x/ x es número primo par}
6. F = {x/ x una alumna de 11}
7. G= {x/ x es un planeta del sol}
8. H = {x/ x es un satélite de la tierra}

4. Describir por comprensión o forma constructiva los siguientes conjuntos:

1. A = {a, b, c, d, e}
2. B = {2, 4, 6, 8,...}
3. C = {Amarillo, azul, rojo}
4. D = {i, 1, -i, -1}
5. E = {a, u, e, o, i}
6. F = { }

5. Indicar cuáles de los siguientes conjuntos son finitos:

1. {Los meses del año}
2. {1, 2, 3,...99, 100}
3. {1, 3, 5, 7,...2n-1}
4. {Los días de la semana}
5. {Las gentes que viven en la tierra}
6. {Los poderes públicos}

6. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son iguales?

1. A={x/x es una letra de "tocata"}
2. B={letras de la palabra "tacto"}
3. C={x/x es una letra de "cota"}
4. D={a, c, o, t}

7. ¿Qué diferencia hay entre las palabras: vacío y cero?

8. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son vacíos?

1. A={x/x es una letra anterior a la "a"}
2. $B = \{x / x^2 = 9 \wedge 2x = 4\}$
3. $C = \{x / x \neq x\}$
4. $D = \{x + 8 = x\}$
5. E={x/ x es rumiante que vuela}
6. $F = \{x / x^2 < 0 \wedge x \in R\}$

9. Dado A={x, y, z}, ¿cuántos subconjuntos hay en A y cuáles son?

10. Dados V={ d }; W={c, d}; X={a, b, c}; Y={a, b}; Z={a, b, d}, establecer la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

1. $Y \subset X$
2. $W \supset V$
3. $W \neq Z$
4. $Z \supset V$
5. $V \not\subset Y$
6. $V \subset X$
7. $X = W$
8. $W \subset Y$

11. Sean $A = \{1,2,3,4\}; B = \{2,4,6,8\}; C = \{3,4,5,6\}$, hallar:

1. $A \cup B$
2. $A \cup C$
3. $B \cup C$
4. $B \cup B$
5. $(A \cup B) \cup C$
6. $A \cup (B \cup C)$

12. Usando los conjuntos del numeral 11, hallar:

1. $A \cap B$
2. $A \cap C$
3. $B \cap C$
4. $B \cap B$
5. $(A \cap B) \cap C$
6. $A \cap (B \cap C)$

13. Utilizando los conjuntos del numeral 11, hallar:

1. A - B
2. C - A
3. B - C
4. B - A
5. A - C
6. B - B

14. Utilizando los conjuntos del numeral 11, hallar:

1. A Δ B
2. A Δ C
3. B Δ C
4. B Δ A
5. A Δ A
6. C Δ B

15. Usando los conjuntos del numeral 11 y suponiendo que el conjunto universal es U={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, hallar:

1. A'	2. B'
3. C'	4. $(A \cap B)'$
5. $(A \cup B)'$	6. $(B - C)'$
7. $(A')'$	8. $(A \triangle C)'$

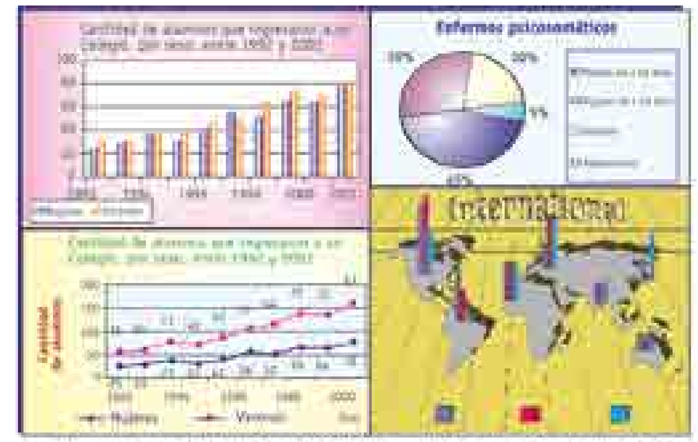
Como aplicación al tema de los conjuntos, con un compañero desarrollamos el siguiente problema.

De los 150 estudiantes que tiene una institución, 85 practican el fútbol, 70 ejercitan el básquet y 55 prefieren la natación; 35 practican fútbol y básquet; 30 practican fútbol y natación; 25 practican básquet y natación; 10 no practican ninguno de los tres deportes. Suponiendo que los entrenamientos se realizan en horarios diferentes, ¿cuántos estudiantes practican fútbol, básquet y natación? Ayúdense de diagramas de Venn-Euler para plantear y comprobar el resultado.

ESTUDIO Y ADAPTACIÓN DE LA GUÍA

GUÍA 2

CONCEPTOS DE ESTADÍSTICA: LOS DATOS AGRUPADOS Y LAS MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL



La representación de la gráfica de datos agrupados permite, de una ojeada, calcular aproximadamente ciertos elementos estadísticos, amén de ser llamativos, independientemente del tipo de gráfico que se utilice. En el mosaico, a la izquierda, se ven un histograma y un polígono de frecuencia para el mismo conjunto de datos; a la derecha, se ven un diagrama circular o un pastel y un mapograma, similar a un diagrama de barras, pero mejor decorado.

INDICADORES DE LOGRO

- Analiza la necesidad de organizar y presentar los datos en tablas de distribución de frecuencias
- Usa adecuadamente la técnica para elaborar tablas de distribución de frecuencias, porcentajes y porcentajes acumulados
- Elabora gráficas para representar los datos estadísticos, como histogramas y polígonos de frecuencia
- Maneja adecuadamente la aplicación EXCEL para elaborar diversos tipos de gráficas con datos estadísticos
- Define y calcula correctamente algunas medidas de tendencia central (media, mediana y moda) y de dispersión (varianza y desviación estándar)
- Usa con suficiencia la aplicación EXCEL para calcular los elementos mencionados antes
- Analiza instrumentos de evaluación, comparación y analiza datos para tomar decisiones. REFERENCIACIÓN COMPETITIVA
- Formula indicadores claros, que permitan medir el desempeño de sus acciones
- Reconoce las etapas del ciclo gerencial básico (PHVA)
- Reconoce procesos exitosos de otros
- Identifica las debilidades de sus procesos y los compara con los de otros
- Aprende y aplica en forma continua las mejores prácticas desarrolladas por otros
- Asume una posición positiva al cambio, que permite ajustar sus prácticas habituales

Las matemáticas son la base de la mayoría de las demás ciencias. La estadística es una de las varias formas en que se aplican los conceptos matemáticos.

Los profesionales de casi todas las ramas de la ciencia deben tener un conocimiento básico en estadística, que les sirva de base y apoyo en sus decisiones, en sus investigaciones y, en general, en todas las actividades propias de su profesión.

Las consideraciones anteriores, justifican plenamente la inclusión de estos apuntes de estadística básica que iniciaremos en esta guía.

A

Con el fin de iniciar la revisión de conceptos estadísticos, desarrollo la siguiente actividad:

Dados los valores 6, 3, 8, 15, 12, 4, 6, 12, 3, 6:

a) Los ordeno de menor a mayor y luego de mayor a menor.

b) Calculo su sumatoria.

c) Hallo su promedio.

d) Busco la sumatoria de sus cuadrados.

e) Determino las diferencias entre cada dato y su promedio.

f) Digo cuál es el dato que más se repite.

B

Con un compañero, leemos, interpretamos e interiorizamos los conceptos expuestos en la guía. Analizamos los ejercicios desarrollados y si es necesario los volvemos a resolver.

El vocablo estadística designa un grupo de métodos cuya finalidad es recoger, organizar y analizar datos numéricos significativos.

Supongamos que se recolectaron los siguientes datos, correspondientes a las edades de un grupo de 46 personas: 30, 31, 31, 32, 12, 36, 38, 39, 33, 28, 27, 38, 31, 27, 34, 35, 34, 38, 26, 33, 33, 27, 35, 36, 35, 32, 30, 34, 35, 10, 38, 27, 30, 37, 30, 35, 34, 26, 35, 38, 35, 32, 18, 34, 10, 39.

A simple vista, estos datos son poco significativos, pero podemos organizarlos en una distribución de frecuencias no agrupadas o agrupadas mediante el siguiente proceso:

1. Para las distribuciones de frecuencia no agrupada, se ordenan los datos de mayor a menor (o de menor a mayor) y se llenan, la primera columna con las edades X y la segunda con el número de veces en que se repite cada dato (frecuencia f), como se ve en la gráfica, aunque repartiendo los datos en 3 columnas para comprimir un poco la información:

X	f	X	f	X	f
10	2	32	3	36	2
10		32		36	
12	1	32		37	2
18	1	33	3	37	
26	2	33		38	5
26		33		38	
27	3	34	5	38	
27		34		38	
27		34		38	
28	1	34		39	2
30	4	34		39	
30		35	7		
30		35			
30		35		n =	46
31	3	35			
31		35			
31		35			
		35			

2. Para las distribuciones de frecuencia agrupada se ordenan los datos de mayor a menor y en la columna de datos X se escriben, entre los extremos, los otros elementos; se calcula el rango R, que es la diferencia entre el valor más grande $X_{Máx}$ y el más pequeño $X_{Mín}$, o sea: $R = X_{Máx} - X_{Mín}$. En este caso: $R = 39 - 10 = 29$

3. Se decide el número C de clases o intervalos, que por lo general no debe ser menor que 5 ni mayor que 15, dependiendo del número de datos. En este caso, tomemos 10.

4. Se determina el ancho A del intervalo, que es igual al rango R dividido entre el número C de clases y redondeando al entero más próximo, o sea: $A = \frac{R}{C} = \frac{29}{10} = 2.9 \approx 3$

5. Se especifican los límites de cada intervalo: los límites inferiores son múltiplos del ancho A (3, 6, 9, 12, 15,....39, 41, 44). El primer límite inferior debe ser menor o igual que el dato X mínimo, que es 10; y los límites superiores son iguales a los inferiores, más el ancho del intervalo, menos 1(en este caso, 3-1=2), o sea, 11, 14, 17,....41.

Lo expuesto de 2 a 5, se visualiza en la siguiente tabla:

X	Frecuencia	Intervalo C	Conteo	Frecuencia	%	% Acumulado
39	2	39 - 41		2	4.35	100.00
38	5	36 - 38		9	19.57	95.65
37	2	33 - 35		15	32.60	76.08
36	2	30 - 32		10	21.74	43.48
35	7	27 - 29		4	8.70	21.74
34	5	24 - 26		2	4.35	13.04
33	3	21 - 23		0	0.00	8.69
32	3	18 - 20		1	2.17	8.69
31	3	15 - 17		0	0.00	6.52
30	4	12 - 14		1	2.17	6.52
28	1	9 - 11		2	4.35	4.35
27	3					
26	2			n=46	100.00	
18	1					
12	1					
10	2					
	n=46					

Cuando el conjunto de datos es grande, se usa el método de Tukey que cuenta los valores en prácticos grupos de a diez: las primeras 4 cuentas se denotan por puntos

que forman los vértices de un cuadrado; las siguientes cuatro cuentas son los lados del cuadrado; la cuentas novena y décima son las diagonales del cuadrado.

De los elementos de la columna “Conteo” se deduce la frecuencia f con sólo contar elementos.

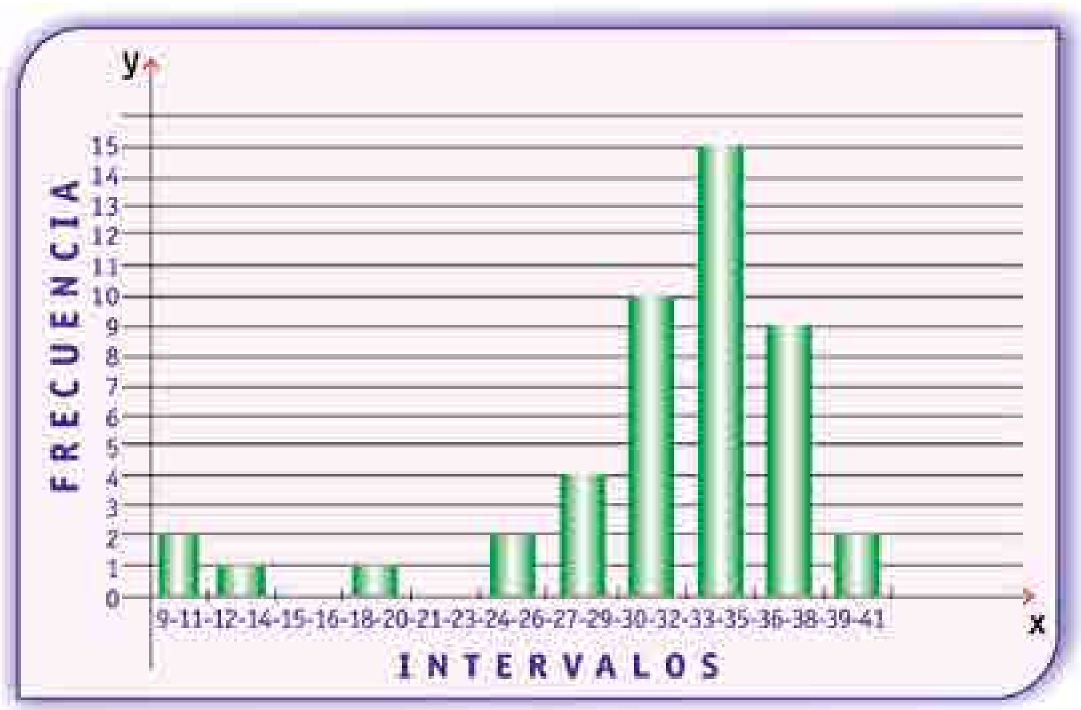
Para obtener la columna % es suficiente calcular, mediante una regla de tres, qué porcentaje es cada frecuencia con respecto al total de 46 datos (para este caso). Para obtener el porcentaje acumulado, basta tener en cuenta que el porcentaje del último intervalo (9 - 11) es el mismo porcentaje acumulado. Ahora, de abajo para arriba, al porcentaje acumulado se le suma el siguiente porcentaje (Por ejemplo: al último porcentaje acumulado 4.35 se le suma el porcentaje 2.17 para obtener un porcentaje acumulado de 6.52; ahora, a 6.52 de porcentaje acumulado se le suma el porcentaje 0.00 para obtener un porcentaje acumulado de 6.52, y así sucesivamente hasta llegar al 100.00).

GRÁFICAS DE DISTRIBUCIONES DE FRECUENCIAS

Las distribuciones de frecuencias agrupadas pueden analizarse más fácilmente si se representan gráficamente (una imagen vale más que mil palabras), pues se puede obtener información importante mirando simplemente su representación geométrica. Las gráficas más comunes son los histogramas o diagramas de barras y polígonos de frecuencia o diagramas de líneas.

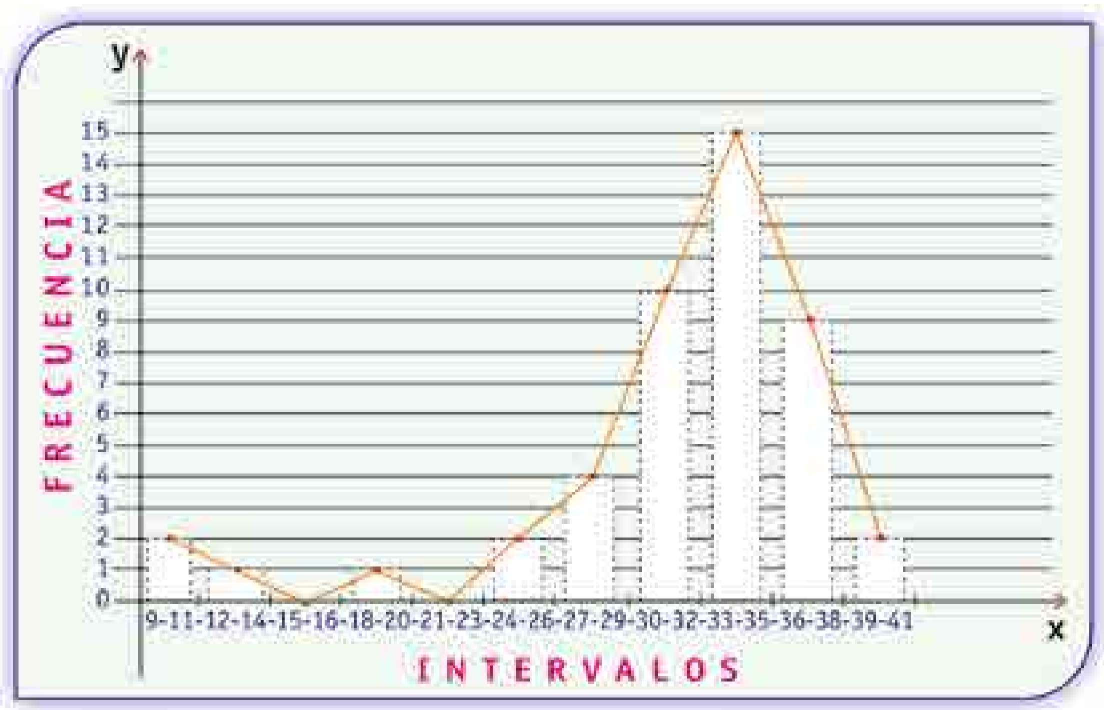
El histograma

Un histograma es una gráfica de una distribución de frecuencias en la que se utilizan barras cuyas alturas son proporcionales a la frecuencia de observaciones para cada clase o intervalo. En un sistema coordenado, en el eje de las abscisas se toman los intervalos y en el eje de las ordenadas la frecuencia, que se muestran en la gráfica anterior, así:



El polígono de frecuencia

El polígono de frecuencia se puede construir dibujando primero un histograma y conectando luego, por medio de segmentos de recta, los puntos medios de la parte superior de cada una de las barras o rectángulos, como se ve en la siguiente figura:



En un gráfico, con una ojeada puede determinarse, por ejemplo, cuál es la mayor frecuencia.

Cabe resaltar que la representación gráfica de los datos llama la atención, evitando la monotonía de la descripción numérica; ayuda a esclarecer el significado de los datos y facilita la retención de los mismos. El inconveniente es que la organización de los datos consume mucho tiempo, pero en la actualidad los computadores facilitan esta labor de una manera rápida y sencilla, usando una aplicación tan común como EXCEL. Se empieza por digitar los datos en columna (aunque no necesariamente) y luego se pueden realizar las siguientes acciones, por ejemplo:

a. Ordenar los datos: para ello seleccione el rango, pulse en Datos (en la barra de menús), Ordenar (en forma ascendente o descendente).

b. Contar los datos: seleccione el rango. Pulse Insertar, Función (en seleccionar una categoría, escoja Matemáticas y trigonométricas), Contar. El resultado es el valor de n.

c. El valor más grande de entre los datos: seleccione el rango. Pulse Insertar, Función (en categoría, opte por Estadísticas), Máx. El resultado es $X_{Máx}$.

d. El valor más pequeño de entre los datos: seleccione el rango. Pulse Insertar, Función (en categoría, opte por Estadísticas), Mín. El resultado es $X_{Mín}$.

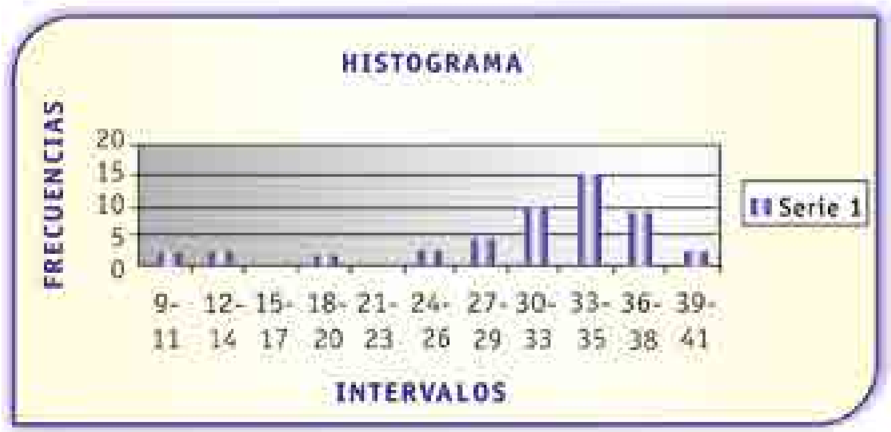
e. Cálculo del rango R. Ubíquese en la celda que desee y como ya conoce El resultado $X_{Máx}$ y $X_{Mín}$, digite: $=X_{Máx} - X_{Mín}$. La máquina mostrará el valor R del rango.

f. Ancho del intervalo: para los datos del ejemplo, ubíquese en una celda adecuada y digite = (valor de R) / 10. Se visualiza el ancho, que debe ser aproximado o por exceso o por defecto a un entero.

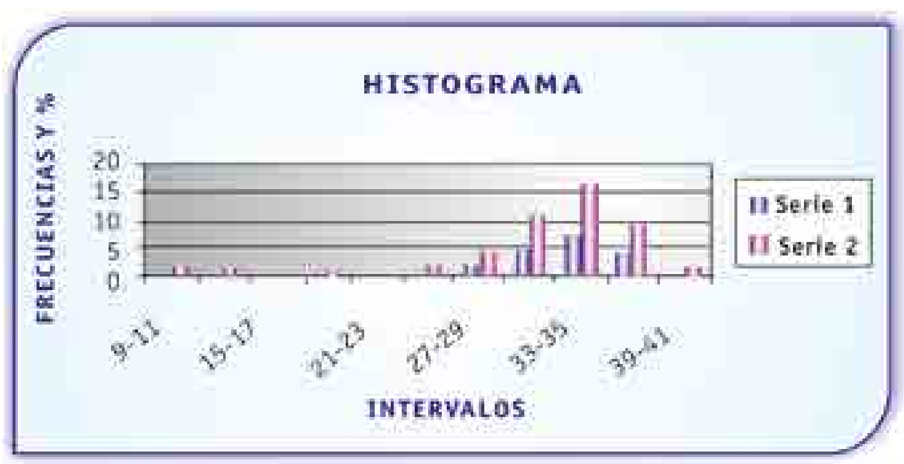
g. Para llenar la columna de las clases o intervalos, recuerde que los límites inferiores son múltiplos del ancho del intervalo (en este caso 9, 12, 15,...,39); los límites superiores se hallan sumando 2 al límite inferior respectivo (11, 14, 17,... 41).

h. En la columna que sigue a la de los intervalos, digite las respectivas frecuencias.

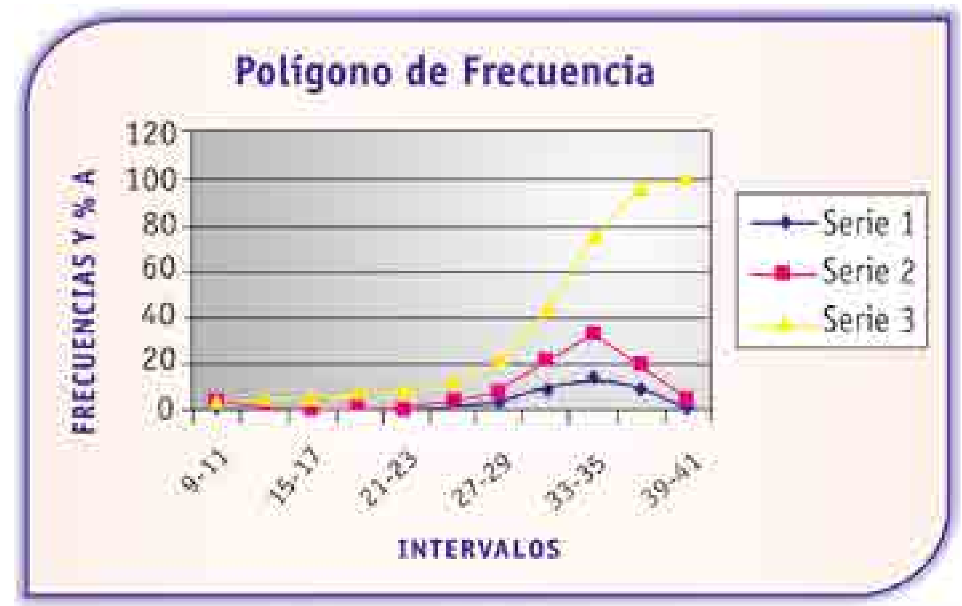
i. Para construir el histograma seleccione los datos de los intervalos y los de las frecuencias. Pulse Insertar, Gráfico, Columnas (pulse en la primera opción de las 7 que se muestran), Siguiente (Ya se visualiza el histograma), Siguiente, (en título del gráfico) escriba HISTOGRAMA, (en eje de categorías (X)) escriba INTERVALOS, (en eje de valores (Y) escriba FRECUENCIAS, Leyenda (Escoja la ubicación del cuadro Serie 1, Siguiente (si lo desea, active mostrar tabla de datos), Siguiente, Finalizar. El gráfico lo puede arrastrar a la posición que desee; mediante los elementos haladores (los 8 cuadraditos que resaltan) lo puede ampliar o reducir. He aquí el resultado:



En una misma gráfica se pueden ilustrar varias situaciones, pues Excel siempre toma la primera columna como el eje X y las demás columnas como valores de Y. Por ejemplo, se pueden graficar tanto la frecuencia como el porcentaje en el problema que nos ocupa. Para obtener la columna de porcentaje (%) ubíquese en la columna contigua a la de las frecuencias y digite los porcentajes correspondientes (aunque podría pedirle a Excel que lo haga por usted). Seleccione tanto la columna de los intervalos como la de la frecuencia y la de los porcentajes. Reitere los pasos para construir la gráfica anterior. El resultado es como éste:



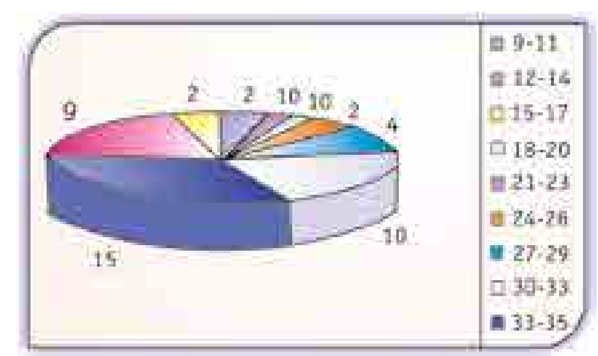
Ahora, elaboremos un gráfico de líneas usando las tres columnas anteriores y otra más que contenga los porcentajes acumulados % A. Digite entonces los porcentajes acumulados, seleccionemos todos los datos, introduzcámonos en gráficos, pero seleccionando Líneas y escogemos la cuarta opción de las 7 que aparecen. Siguiendo las instrucciones, se obtendrá algo como esto:



La serie 1 es la gráfica de las frecuencias, la serie 2 es la de los porcentajes y la serie 3 es la de porcentajes acumulados, conocida como OJIVA DE GALTON.

Otro tipo de gráfica bastante usada, y que se hace fácilmente en Excel, es la de tipo pastel.

Usemos la columna de intervalos y la de frecuencias del ejercicio sobre las edades. Seleccionamos todos los datos, entremos a gráficos. Se pulsa sobre Circular y se escoge la opción 2 de las 6 que se muestran. Se siguen las instrucciones del programa para obtener una gráfica como ésta:



Además de los tipos de gráficos usados antes, Excel presenta otra gama, al gusto y acorde con las necesidades. Es importante, pues, ensayar.

LAS MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL

Como su nombre lo indica, son ciertos valores de datos que son centrales o típicos en un conjunto de datos agrupados.

Entre las medidas de tendencia central se tienen:

1. La media aritmética o promedio

Si dado un conjunto de datos se suman cada uno de los valores que toma la variable X, y el total se divide por el número de datos, se obtiene un indicador estadístico llamado media aritmética o promedio, que se simboliza y define así:

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_n}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{n}.$$

Por ejemplo, en las edades en años de las 46 personas indicadas al principio: $\overline{X} = \frac{30+31+31+\ldots\ldots 34+10+39}{46} = \frac{1.448}{46} \approx 31.47$. Luego, la edad promedio es de 31.47 años aproximadamente.

2. La moda

Es el dato de más alta frecuencia, es decir, el que se repite un mayor número de veces (el que está de moda). Por ejemplo, en el conjunto propuesto de las 46 edades, la moda es 35 porque es el que más se repite (7 veces).

Sugerencia: así como Excel facilita la construcción de gráficas estadísticas, de modo ágil, también permite calcular automáticamente las medidas de tendencia central. Simplemente se digitan los datos (aún sin ordenar), se observan las direcciones del rango y se ubica el cursor en la posición en donde se desea que aparezca el resultado. Se entra a Insertar, Función, Estadísticas, Mediana (se le digita el rango - digamos A1..A46 - para nuestro caso de las edades. En la celda seleccionada aparece el valor central; para la moda ó para el promedio se procede igual, buscando estos nombres en Funciones Estadísticas.

3. La mediana

La mediana Md es otra medida de tendencia central y corresponde al valor medio en un conjunto de valores ordenados, es decir, es un valor tal que antes y después de él hay igual número de valores. Si el número de observaciones (ya ordenados) es impar, la mediana corresponde al valor que está en el centro de la distribución; si el número de observaciones es par, la mediana es el promedio de los dos términos centrales de la distribución.

Por ejemplo, en el conjunto ordenado 23, 22, 21, **20**, 19, 18, 17 la mediana es 20, porque antes y después de él hay 3 observaciones.

En el conjunto de datos de las edades de 46 personas (propuesto al principio), ordenado queda: 39, 39, 38, 38, 38, 38, 38, 37, 37, 36, 36, 35, 35, 35, 35, 35, 35, 35, 34, 34, 34, 34, **34**, **33**, 33, 33, 32, 32, 32, 31, 31, 31, 30, 30, 30, 30, 28, 27, 27, 27, 26, 26, 18, 12, 10, 10. Como los datos ordenados tienen un número par de elementos, la mediana es el promedio de los dos términos centrales, 34 y 33, es decir que $\text{Md} = \frac{34+33}{2} = 33.5$ y significa que antes de los valores 34 y 33 hay 22 observaciones antes y después de ellos.

4. Cuartiles, Deciles y Percentiles

Otras medidas que están muy relacionadas con la Mediana, ya que se basan también en su posición en una serie de observaciones, son los Cuartiles, Deciles y Percentiles.

Si el conjunto de observaciones se divide en cuatro partes iguales, los valores que le corresponden a cada cuarto de la serie se denominan CUARTIL. El primer Cuartil, Q_1, es el valor por debajo del cual quedan el 25% de todos los valores; el tercer Cuartil, Q_3 , es el valor bajo el cual quedan el 75% de los valores; el segundo Cuartil, Q_2, es exactamente la Mediana, como se puede apreciar en la Ojiva de Galton sacada de los intervalos y el porcentaje acumulado, como se dijo antes:

Para estimar la mediana en la gráfica, se localiza "50" (Q_2) en el eje vertical; se avanza horizontalmente hasta la intersección con la curva y luego se avanza verticalmente hacia abajo hasta intersectar el eje horizontal, en donde se puede leer la mediana (33.5).

Similarmente, los Deciles dividen la distribución en 10 partes iguales y los Percentiles en 100 partes iguales.

MEDIDAS DE VARIABILIDAD

Además de las medidas típicas o de tendencia central, existen medidas de variabilidad entre los valores, es decir, qué tan grandes son las diferencias entre los valores. Estas medidas cuantifican el grado de dispersión o la extensión de las diferencias individuales evidenciadas en la distribución.

Entre las medidas de variabilidad veremos la varianza y la desviación estándar.

La varianza se utiliza en estudios poblacionales para medir la homogeneidad de una muestra X, es decir, permite saber si la muestra es representativa de toda la población, aunque su resultado se encuentra elevado al cuadrado y en consecuencia se recomienda usar la desviación estándar que es una medida de variabilidad más exacta.

Cuando todas las N observaciones de la población están incluidas en el conjunto de datos, la varianza σ^2 (sigma minúscula al cuadrado), se encuentra dividiendo la suma

de los cuadrados de las diferencias entre cada dato y el promedio $\overline{X}$, o sea: $\sigma^2 = \dfrac{\sum (X-\overline{X})^2}{N}$. Para el ejemplo del conjunto de los datos de las 46 edades propuesto al principio, cuyo promedio es 31,47, se tiene:

Varianza $= \sigma^2 = \dfrac{\sum (X-\overline{X})^2}{N} = \dfrac{2179{,}48}{46} \approx 47{,}38$ años² la varianza, como suma de cuadrados, no tiene mucho significado descriptivo directo, amén de estar expresada en unidades cuadradas en lugar de las unidades originales.

La varianza se usa para calcular la desviación estándar σ, que se define como la raíz cuadrada de la varianza, o sea, $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\dfrac{SC}{N}}$; en el ejemplo: $\sigma = \sqrt{\dfrac{2179{,}48}{46}} = 6{,}88$ años.

La desviación estándar es más útil que la varianza para describir la variabilidad de un conjunto de datos y también tiene las mismas unidades originales. En una distribución normal, se espera que aproximadamente dos tercios de los valores estén dentro de + 1 ó -1 desviaciónes estándar con respecto al promedio.

Para determinar la comprensión de los elementos estadísticos vistos en B, en el subgrupo resolvemos los siguientes planteamientos. Comparamos las respuestas con las de otros subgrupos, nos ponemos de acuerdo y comentamos nuestras conclusiones con el profesor con la finalidad de aprovechar los aportes de todos.

Los siguientes datos corresponden al cociente intelectual de 150 niños de un colegio: 98, 119, 93, 99, 106, 102, 108, 109, 114, 108, 91, 91, 89, 120, 106, 127, 98, 104, 106, 114, 104, 106, 124, 101, 97, 121, 108, 113, 105, 125, 113, 120, 96, 108, 104, 116, 114, 118, 115, 121, 125, 129, 105, 118, 105, 100, 102, 110, 98, 122, 101, 120, 95, 118, 122, 95, 96, 129, 112, 117, 114, 109, 91, 113, 112, 89, 99, 124, 103, 105, 104, 106, 114, 124, 103, 108, 105, 92, 101, 112, 93, 109, 108, 115, 114, 93, 125, 88, 101, 88, 91, 121, 113, 121, 115, 107, 126, 113, 89, 104, 96, 129, 107, 120, 115, 118, 100, 100, 109, 97, 91, 122, 97, 118, 100, 106, 115, 110, 99, 85, 100, 112, 128, 111, 105, 98, 113, 101, 108, 116, 94, 92, 125, 121, 108, 119, 116, 103, 111, 113, 85, 109, 128, 88, 119, 118, 116, 113, 122, 126.

a) Ordenamos los datos de mayor a menor.

b) Hallamos la frecuencia de cada dato.

c) Calculamos el rango para la distribución agrupada.

d) Tomamos 9 clases o intervalos y buscamos la amplitud del intervalo, redondeando al entero más próximo.

e) Establecemos los límites inferior y superior de los intervalos.

f) Buscamos la frecuencia de las diversas clases.

g) Hallamos la frecuencia acumulada.

h) Encontramos el porcentaje de las diversas clases.

i) Determinamos el porcentaje acumulado.

j) Elaboramos las gráficas (en Excel si es posible) de barras y de líneas, tomando en el eje horizontal los intervalos o clases y en el vertical la frecuencia y la frecuencia acumulada o el porcentaje y el porcentaje acumulado.

k) Volvemos a los datos y calculamos el promedio, la mediana y la moda.

l) Si disponemos de los medios, damos las instrucciones a EXCEL para desarrollar los literales anteriores y poder confrontar con respuestas.

D

Como aplicación a los conceptos vistos, con el subgrupo desarrollamos las siguientes actividades:

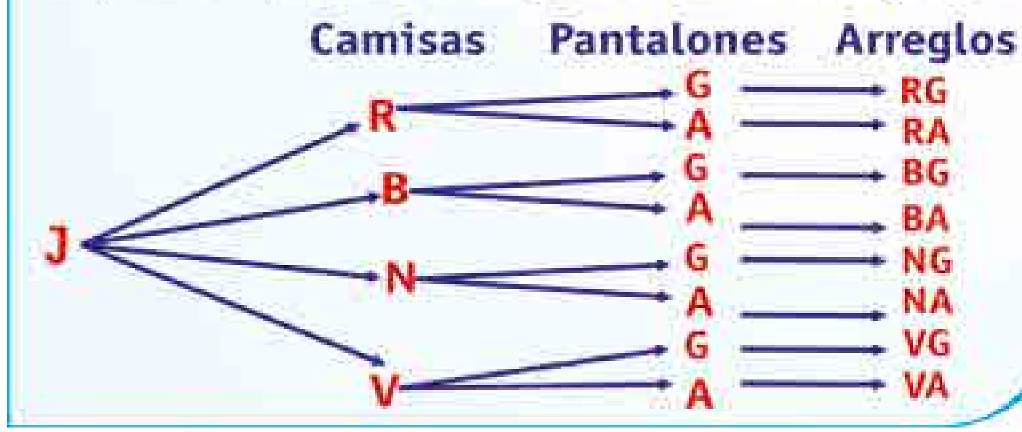
1) En su institución, recopilen datos sobre el consumo de alcohol, tabaco y sustancias alucinógenas considerando, por ejemplo, edad y sexo. Tabulen, grafiquen y calculen elementos estadísticos de los indicados en la guía.
2) En su entorno, recopilen datos sobre analfabetismo con variables como edad, sexo, escolaridad. Igualmente, tabulen, grafiquen y calculen elementos estadísticos de los indicados en la guía.
3) Recorten datos estadísticos de periódicos o revistas recientes, interprétenlos y presenten sus resultados al grupo.

ESTUDIO Y ADAPTACIÓN DE LA GUÍA

GUÍA 3

LA TEORÍA COMBINATORIA

Un joven dispone de cuatro camisas de colores: roja (R), blanca (B), negra (N) y verde (V); también tiene dos pantalones: gris (G) y azul (A).
Para determinar el número de combinaciones de las camisas con los pantalones puede usar un diagrama arbolar como el siguiente:



INDICADORES DE LOGRO

- Interpreta el principio fundamental de conteo y lo aplica correctamente para calcular ciertos arreglos de los elementos de un conjunto
- Define el concepto de permutación de los n elementos de un conjunto tomando r objetos cada vez y lo usa adecuadamente para resolver problemas de aplicación
- Define las combinaciones de los n elementos de un conjunto considerados en grupos de r objetos y las usa correctamente para resolver problemas de aplicación
- Identifica problemas, causas y consecuencias y establece una definición de éste. SOLUCIÓN DE PROBLEMAS
- Aporta soluciones y evalúa alternativas
- Ejecuta en la medida de sus posibilidades, acciones que contribuyen a la solución
- Hace seguimiento a la solución y retroalimentación

A

Con un compañero analizamos y respondemos las siguientes cuestiones:

Dado un número natural n, ¿qué es el factorial de n y como se simboliza?
Calculamos 5! y 8!

B

Con los compañeros del subgrupo, leemos y analizamos la información que se presenta a continuación y respondemos las preguntas que encontremos. Si es preciso, copiamos los problemas resueltos.

Para iniciarnos en el tema veremos situaciones como las siguientes:

1) Una compañía de transportes que presta sus servicios en 100 poblaciones desea imprimir sus tiquetes de tal manera que en cada uno aparezca el nombre de la población que lo expide y el nombre de la población a que se destine. ¿Cuántos grupos de boletos se deben imprimir?

2) En Colombia, las placas de las motocicletas deben llevar 3 letras y un número de dos dígitos. Sin considerar CH, LL, RR, ¿cuántas placas distintas se pueden fabricar con ese diseño?

PRINCIPIO FUNDAMENTAL DE CONTEO

Si un primer suceso puede verificarse de m1 modos diferentes y si después de haber ocurrido éste, puede verificarse un segundo suceso de m2 maneras diferentes, entonces los dos sucesos pueden verificarse en el orden mencionado de m1*m2 modos distintos.

Usando este principio se pueden solucionar los problemas planteados antes. En efecto: En el planteo 1): Un tiquete, generalmente, indica el punto de origen y el punto de destino, es decir: De ________________ A ______________. En e ste caso, el nombre de la población de origen debe aparecer en el primer espacio en blanco; puesto que hay

100 poblaciones entre las cuales escoger, el hecho puede ocurrir de 100 modos diferentes. Luego m1=100. Después de escoger el primer nombre, quedan 99 posibilidades de elección para llenar el segundo espacio en blanco. Luego m2=99. Por el principio fundamental de conteo, el número de grupos de boletos que deben imprimirse es de m1*m2=100*99=9900.

Si el problema involucra más de dos sucesos, se puede ampliar el principio fundamental de conteo así: si después de haber ocurrido los dos primeros sucesos, puede ocurrir un tercero de m3 modos diferentes, un cuarto de m4 modos distintos y un enésimo de mn modos distintos, entonces los n sucesos pueden ocurrir de m1*m2*m3*m4*....*mn modos diferentes.

Ahora, se puede resolver el planteo 2). Como no hay restricciones, se pueden repetir letras o dígitos más de una vez en cada placa y por tanto BBB 22 es permitido. Ahora, la primera posición de las letras se puede llenar de m1=27 modos distintos; la segunda posición de m2=27 maneras diferentes y la tercera posición de m3=27 modos distintos. Puesto que cualquiera de los dígitos (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) se pueden usar en las otras dos posiciones, m4=10 y m5=10. Por tanto el número de placas posibles es:
m1*m2*m3*m4*m5 = 27*27*27*10*10 = 1968300

3) Para el enunciado anterior, determinar el número de placas posibles si una letra o un dígito no aparecen repetidos.

   En este caso, el primer lugar se puede llenar de 27 maneras distintas; como no se pueden repetir letras, la segunda posición sólo se puede llenar de 26 modos distintos y por idéntica razón, la tercera posición únicamente se puede llenar de 25 maneras diferentes; la primera cifra del número se puede llenar de 10 modos distintos, pero la segunda cifra sólo se puede llenar de 9 modos distintos. Por lo tanto, número placas distintas y con la restricción impuesta es:
   m1*m2*m3*m4*m5=27*26*25*10*9 = 1579500.

Con 15 jóvenes de su grupo, ¿Cuántos equipos de básquetbol, distintos, pueden formarse?

LAS PERMUTACIONES DE n ELEMENTOS DIFERENTES TOMADOS EN GRUPOS DE r ELEMENTOS

Los problemas que tienen que ver con placas de identificación, como en los dos últimos problemas, comprenden la ordenación de cinco caracteres o símbolos colocados horizontalmente. Si los caracteres son diferentes, como en ANM43, toda ordenación de ellos, con la condición de que las letras se coloquen primero, conforma un número de placa válido. Esta situación permite aseverar que "toda ordenación de los n elementos de un conjunto, se llama **permutación** del conjunto".

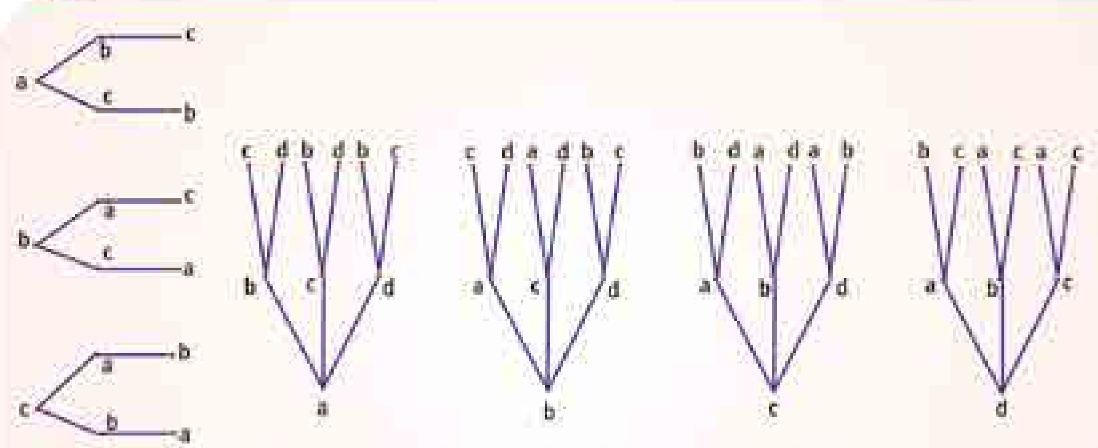
Por ejemplo, sean las letras a, b y c.

Las permutaciones unarias que podemos formar con ellos son a, b y c.

Las permutaciones binarias que podemos formar son ab, ac, ba, bc, ca y cb (para obtenerlas se agregan a las unarias cada uno de los otros elementos).

Las permutaciones ternarias que se pueden formar son abc, acb, bac, bca, cab y cba (resultan de agregarle a las binarias cada uno de los otros elementos).

En ocasiones resulta útil elaborar diagramas arbolares para mostrar las permutaciones de los elementos de un conjunto, como se ve en la figura:



A LA IZQUIERDA SE VE EL DIAGRAMA ARBOLAR PARA LAS PERMUTACIONES TERNARIAS DE 3 ELEMENTOS a, b, y c. A LA DERECHA, Y EN FORMA VERTICAL, LAS PERMUTACIONES TERNARIAS DE 4 ELEMENTOS a, b, c, d.

Para indicar las permutaciones de n elementos tomados en grupos de r objetos se escribe ${}_nP_r$. Como en la ordenación no se repiten elementos, el primer lugar se puede llenar de n modos; una vez llena esta posición quedan n-1 elementos para llenar la segunda; hecho esto, quedan n-2 elementos para llenar la tercera, y así sucesivamente hasta n - (r - 1) = n -r + 1 modos de llenar la posición r, es decir:

(1) ${}_nP_r = n(n-1)(n-2)....(n-1+r)$.

Para continuar, se debe recordar que $n! = n(n-1)(n-2)(n-3).....2*1$, que se lee "n factorial es igual n por n-1 por n-2 por...por 2 por 1", o sea que el factorial de n es el producto de los n primeros números naturales. Así: 3! = 3*2*1 = 6;

5! = 5*4*3*2*1 = 120. Se acepta que 1! = 0! = 1.
Obsérvese que 6! = 6*5*4! y 8! = 8*7!, lo que nos permite afirmar que:
n! = n(n-1)(n-2)....(n - r + 1)(n - r)! Por tanto si la expresión (1) la multiplicamos

por $\dfrac{(n-r)!}{(n-r)!}$ la igualdad no se altera y en consecuencia:

(2) ${}_nP_r = n(n-1)(n-2)....(n-1+r)*\dfrac{(n-r)!}{(n-r)!} = \dfrac{n!}{(n-r)!}$, fórmula que permite calcular el número de permutaciones de n elementos tomándolos en grupos de r objetos.

Ejemplos:

$${}_6P_4 = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6*5*4*3*2!}{2!} = 360$$

$${}_{11}P_5 = \frac{11!}{(11-5)!} = \frac{11*10*9*8*7*6!}{6!} = 55440$$

Problema 1: seis personas entran a una sala en la que hay diez sillas. ¿De cuántas maneras pueden ocupar las sillas?

Solución: el problema se reduce a calcular las permutaciones de 10 considerando grupos de 6, o sea:

$${}_{10}P_6 = \frac{10!}{(10-6)!} = \frac{10*9*8*7*6*5*4!}{4!} = 151200$$

Problema 2: ¿cuántos números distintos de 4 cifras se pueden formar con las cifras 1, 2, 3 y 4?

Solución: se trata de determinar las permutaciones de las 4 cifras tomándolas en grupos de a 4, es decir:

$${}_4P_4 = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{4!}{(4-4)!} = \frac{4!}{0!} = \frac{4*3*2*1}{1} = 24$$

Problema 3: ¿de cuántas maneras diferentes pueden ordenarse las letras de la palabra DUPLETA?

Solución: se trata de encontrar las permutaciones de las 7 letras (todas distintas) en grupos de 7 elementos, así:

$$_7P_7=\frac{n!}{(n-r)!}=\frac{7!}{(7-7)!}=\frac{7!}{0!}=\frac{7*6*5*4*3*2*1}{1}=5040$$

Problema 4: ¿de cuántas maneras diferentes se pueden ordenar las letras de la palabra ARACATACA?

Solución: el problema es similar al anterior, pero algunas letras están repetidas (la A 5 veces y la C en 2). Por tanto, el resultado de la permutación de las 9 letras en grupos de a 9, debe dividirse entre los factoriales del número de veces de las repeticiones
(5! y 2! en este caso), o sea:
$_9P_9=\frac{n!}{(n-r)!}=\frac{9!}{(9-9)!}=\frac{9!}{0!}=\frac{9*8*7*6*5*4*3*2*1}{1}=362880$, pero las letras de cada grupo tienen que ser todas distintas. Por tanto:

Número ordenaciones $=\frac{362889}{5!*2!}=\frac{362880}{240}=1.512$, que es la respuesta.

Ejemplo 5: con las cifras 1, 2, 6, 8, 5, ¿cuántos números de 3 cifras que empiecen por 5 se pueden formar?

Solución: como el 5 estará siempre al principio de cada número, entonces cada uno tendrá la forma 5NN. Por lo tanto n=5 - 1 = 4 y r= 3 - 1=2. En consecuencia,

$$_4P_2=\frac{4!}{(4-2)!}=\frac{4!}{2!}=12$$

Con las cifras 3, 4, 5, 6 ¿cuántos números distintos se pueden formar? Ayúdense de un diagrama arbolar para la solución.

COMBINACIONES

El problema de hallar el número de modos en que los elementos de un conjunto se pueden separar en subgrupos tales que si dos de ellos tienen igual número de elementos, se diferencien por lo menos en un elemento, es una combinación. Por ejemplo, con las letras a, b, c y d se pueden formar:

Combinaciones monarias: a, b, c, d (se toman de a 1).
Combinaciones binarias: ab, ac, ad, bc, bd, cd (se obtienen escribiendo a la derecha de cada letra todas las letras siguientes, de una en una.

Combinaciones ternarias: abc, abd, acd, bcd (Resultan de escribir a la derecha de cada binaria, una a una, las letras que siguen a la última de cada binaria.

Para indicar las combinaciones de n elementos tomándolos en grupos de r objetos se indica por $_nC_r$ y se pueden calcular mediante la expresión:

$$_nC_r=\frac{_nP_r}{r!}=\frac{n!}{r!(n-r)!}\ .$$

Ejemplo: $_{10}C_6=\frac{10!}{6!(10-6)!}=\frac{10*9*8*7*6!}{6!*4!}=210$

Problema: ¿Cuántos comités de 8 personas se pueden formar con un conjunto de 50 personas?

Solución: el problema se resuelve buscando los grupos de 8 personas que pueden obtenerse de las 50 personas, o sea:

$$_{50}C_8=\frac{50!}{8!(50-8)!}=\frac{50!}{8!*42!}=\frac{50*49*48*47*46!*45*44*43*42!}{8!*42!}$$

$_{50}C_8=536878650$ comités.

Problema: usted tiene una microempresa y desea darles empleo a 6 mujeres y a 4 hombres. ¿De cuántos modos puede hacer la selección del personal si los solicitantes son 9 mujeres y 6 hombres?

Solución: las mujeres pueden ser seleccionadas de $_9C_6$ y los hombres de $_6C_4$ modos. Por el principio fundamental de conteo, la selección puede hacerse de $_9C_6*{}_6C_4$ Luego:

$$_9C_6*{}_6C_4=\frac{9!}{6!(9-6)!}*\frac{6!}{4!(6-4)!}=\frac{9!}{3!*4!*2!}=1260$$

OBSERVACIÓN: para diferenciar en la resolución de un problema y determinar si es una permutación o una combinación se procede así: se forma un grupo cualquiera, según el enunciado del problema y con los mismos elementos de ese grupo se trata de formar otro grupo, si se consigue formar otro grupo diferente, el problema en cuestión es una permutación. Si no es posible formar otro grupo, se trata de una combinación.

Ejemplo 1: ¿cuántos números distintos de 3 cifras se pueden formar con las cifras 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7?

Supongamos el número 375 y con estas mismas cifras tomemos, por ejemplo, el 753. Como los dos números son diferentes, entonces es una permutación de 7 elementos tomándolos de a 3. Luego: ${}_7P_3 = \dfrac{7!}{(7-3)!} = \dfrac{7!}{4!} = 210$

Ejemplo 2: con las mismas cifras del problema anterior, ¿cuántas sumas, de 3 sumandos pueden formarse?

Tomemos, por ejemplo 5 + 3 + 4 = 12; con los mismos elementos, hagamos otra suma: 4 + 5 + 3 = 12. Como los resultados son iguales, se trata de una combinación de 7 elementos tomados de a 3. Por tanto, ${}_7C_3 = \dfrac{7!}{3!\,(7-3)!} = 35$

C

Para comprobar el avance en el conocimiento e interiorizar conceptos, con los compañeros del subgrupo desarrollamos lo siguiente, comparamos los resultados con los de otros subgrupos, discutimos hasta ponernos de acuerdo y compartimos con el profesor.

1. En una carrera de 100 metros planos participan 12 atletas. ¿De cuántas formas distintas podrán ser premiados los tres primeros lugares con medalla de oro, plata y bronce? (1320).

2. ¿Cuántas credenciales se pueden formar si el número de identificación de cada una consiste de una de las letras del alfabeto seguida de un número de tres dígitos? (27000).

3. ¿Cuántas credenciales de las del problema anterior no tienen dos dígitos iguales y el primero de los dígitos es diferente de cero? (13608).

4. ¿Cuántos grupos en los que haya una ficha blanca, una azul y una verde se pueden seleccionar de 15 fichas blancas, 18 azules y 6 verdes? (1620).

5. ¿Cuántos ramos de 4 especies diferentes de flores, se pueden formar con 7 gladiolos, 10 jacintos, 21 rosas y 14 margaritas? (20580).

6. En una reunión hay 10 mujeres y 7 hombres. ¿Cuántos grupos pueden formarse en los que estén presentes 5 mujeres y 4 hombres? (8820).

7. Se tienen 7 personas para formar comisiones de 3 personas:

   a) Si en las comisiones no hay jerarquía, es decir, todas desempeñan la misma labor, ¿cuántas comisiones distintas se pueden formar? (35).

   b) Si en las comisiones una misma persona tiene que estar presente, ¿cuántas son las comisiones que pueden formarse? (15).

D

Como aplicación a la teoría combinatoria, desarrollo los siguientes problemas de aplicación.

1. En nuestro medio una lotería premia a quien acierte un número de cuatro cifras y una de las 150 series. ¿De cuántos billetes consta la emisión de esa lotería?

2. El juego del baloto consiste en acertar 6 de los números que contienen unas balotas numeradas del 1 al 45 (que son pesadas y revisadas por organismos de control) y que son extraídas al azar por un mecanismo especial. ¿Cuántos formularios distintos pueden elaborarse?

ESTUDIO Y ADAPTACIÓN DE LA GUÍA

GUÍA 4

¿Y QUÉ ES LA PROBABILIDAD MATEMÁTICA?

BLAS PASCAL (1623-1665) PIERRE DE FERMAT (1601-1665)

Blas Pascal en 1665, junto a Pierre de Fermat, formularon la teoría matemática de la probabilidad, de enorme importancia en las estadísticas en que se basan las compañías de seguros, las matemáticas y las ciencias sociales, así como un elemento fundamental en los cálculos de física teórica moderna.

INDICADORES DE LOGRO

- Define comprensivamente los conceptos de fenómenos aleatorio y determinista, suceso y espacio muestral
- Define y aplica correctamente el concepto de probabilidad matemática
- Plantea y resuelve con propiedad problemas relativos a la definición de probabilidad
- Analiza las ventajas y desventajas de las alternativas posibles, para elegir la más adecuada. TOMA DE DECISIONES
- Asume responsabilidad por las decisiones tomadas
- Prevé consecuencias de sus actos a corto y largo plazo
- Comunica sus decisiones en forma oportuna
- Explora y busca de manera consiente las variables que debe considerar antes de tomar una decisión o solucionar un problema
- Considera posibilidades antes de elegir la más conveniente

A

Con un compañero analizamos cuidadosamente y respondemos las siguientes cuestiones:

1) Dado el conjunto A = {1, 2, 3} calculamos el conjunto potencia, es decir, el número de subconjuntos que pueden obtenerse del conjunto A. ¿Cuántos subconjuntos son?

2) Dadas tres proposiciones matemáticas P, Q y R, elaboren el conjunto de verdaderos V y de falsos F de modo que no haya combinaciones repetidas. ¿De cuántas maneras pueden combinarse los verdaderos V y los falsos F?

3) ¿Qué se puede concluir de los resultados anteriores?

4) ¿De cuántas maneras se pueden permutar las letras del nombre de uno de nosotros, tomándolas de a 3? y ¿tomándolas todas?

5) Y ¿de cuántos modos se pueden combinar las letras del nombre del otro compañero, tomándolas de a 3? y ¿tomándolas todas?

Comparemos los resultados con los de otros compañeros y pongámonos de acuerdo.

B

Con los compañeros del subgrupo, leemos y analizamos la información que se presenta a continuación. Si es preciso, copiamos los problemas resueltos.

CONCEPTOS BÁSICOS

La probabilidad es la posibilidad de que algo suceda. Las probabilidades se expresan como fracciones o como decimales que están entre uno y cero. Tener una probabilidad de cero significa que algo nunca va a suceder y una probabilidad de uno indica que algo va a suceder siempre.

Experimento o fenómeno aleatorio: aquel cuyo resultado no es previsible. Por ejemplo, lanzar un dado normal (que no esté "cargado").

Experimento o fenómeno determinista: cuando el resultado se puede anticipar. Por ejemplo, cuando en el laboratorio se combinan hidrógeno y oxígeno en proporción y condiciones adecuadas, se puede predecir que resultará agua.

Sucesos: son cada uno de los probables resultados de un experimento aleatorio. Por ejemplo, al arrojar al aire una moneda, cae o cara o sello.

Espacio muestral: es el conjunto de todos los posibles sucesos que pueden obtenerse en un experimento aleatorio. Por ejemplo, para un dado normal el espacio muestral o Universo es E ={1, 2, 3, 4, 5, 6}, pues a cada una de las 6 caras del dado se le asocia un número.

Suceso seguro: es el mismo espacio muestral, pues este suceso ocurre siempre que se realice el experimento.

Suceso imposible es el conjunto vacío (ϕ), que siempre será subconjunto del espacio muestral; este suceso no ocurre nunca en el experimento.

LA PROBABILIDAD MATEMÁTICA:

Si una secuencia de circunstancias que hacen que un suceso ocurra o deje de ocurrir, obedecen a una ley bien definida, el resultado puede anticiparse con seguridad. Pero si esas circunstancias no están regidas por alguna ley, el resultado es aleatorio, es decir, depende del azar. Por ejemplo, si se lanzan al aire tres monedas legítimas, por efecto de la gravedad caerán, más no se puede aseverar que las tres caerán mostrando, por ejemplo, sellos. Realmente, las tres monedas pueden caer, mostrando sello, de una sola manera y pueden en cambio caer mostrando diferentes diseños (sellos o caras) de 7 maneras, o sea, la probabilidad está en contra de que caigan todas en sello. En el lenguaje de los apostadores profesionales, se dice que las apuestas están 7 a 1 en contra de que las tres monedas caigan mostrando sellos. En efecto, sean M1, M2 y M3 las tres monedas y sean C las caras y S los sellos. Se elaboran las diversas combinaciones diferentes de caras o sellos, como se ve en la figura:

M1	M2	M3
C	C	C
C	C	S
C	S	C
C	S	S
S	C	C
S	C	S
S	S	C
S	S	S

En la gráfica se ven las ocho posibles combinaciones de caras o sellos (espacio muestral); la última: S S S es única como se dijo arriba; se observa que no hay más combinaciones de C y S.

La posibilidad matemática de que un suceso llegue a ocurrir, es una razón que expresa el valor numérico de las oportunidades a favor de la ocurrencia del suceso. Tal razón se define así: si un suceso puede ocurrir de h modos y dejar de ocurrir de f modos, la probabilidad P de que ocurra es:

1. $P = \dfrac{h}{h+f}$

   Y la probabilidad Q de que no ocurra es:

2. $Q = \dfrac{f}{h+f}$

   Sumando ordenadamente la 1. con la 2., resulta:

3. $P + Q = \dfrac{h+f}{h+f} \Rightarrow P + Q = 1$, o sea que la probabilidad de que el suceso ocurra sumada con la probabilidad de el suceso no ocurra es igual a 1. En la última igualdad se observa que si no es posible que el suceso no ocurra, entonces f=0, P=1 y Q=0. En resumen, la probabilidad igual a 1 implica certeza y viceversa.

Ejemplo 1: en el caso de las tres monedas de 100 pesos el suceso de que las tres monedas caigan mostrando todas sello puede ocurrir sólo de una manera, como se ve en la tabla anterior. Además, como cada moneda puede caer de 2 modos, por el principio

de conteo las tres pueden caer de $2^3 = 2*2*2 = 8$ modos. En consecuencia pueden caer mostrando diseños distintos a los sellos de 7 maneras. Por tanto la probabilidad de que caigan mostrando sólo sello es $P = \dfrac{1}{1+7} = \dfrac{1}{8}$.

Se reitera que la posibilidad matemática de que un suceso llegue a ocurrir de determinado modo, es simplemente la razón entre el número de h de maneras en que puede ocurrir del modo deseado y el número total m de posibilidades. Es evidente que no existe ninguna seguridad de que $\frac{1}{8}$ de veces de las que se lanzan las tres monedas al aire, éstas caigan mostrando sólo sello. Se destaca que si el número de lanzamientos es muy grande la probabilidad se acerca al valor de $\frac{1}{8}$. La situación puede simularse en el computador escribiendo un sencillo programa (en Basic, en Visual Basic, Pascal...) para que la máquina calcule y cuente las diferentes combinaciones.

Ejemplo 2: en tarjetas diferentes se escriben todos los números de 3 cifras que pueden formarse con los dígitos del 1 al 9, sin repetir ningún dígito. Las tarjetas se depositan en un saco y se mezclan. ¿Cuál es la probabilidad de que al sacar una tarjeta del montón, la suma de los dígitos del número que aparece en ella sea 10?

Solución: en el conjunto $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ las ternas que cumplen la condición de que sumados los elementos el resultado sea 10 son:
{1, 2, 7}, {1, 3, 6}, {1, 4, 5} y {2, 3, 5} y las permutaciones de cada una de ellas que son, en cada terna ${}_3P_3 = \dfrac{3!}{(3-3)!} = \dfrac{3!}{0!} = 6$. Por tanto, en el montón habrá 6*4=24 que cumplen la condición de que la suma de sus dígitos sea 10, luego el suceso puede ocurrir de h=24 maneras. Como el total de tarjetas son las permutaciones de 9 elementos tomándolos de a 3 es ${}_9P3 = \dfrac{9!}{(9-3)!} = \dfrac{9!}{6!} = 504$, se tiene que el número de veces en que el suceso deja de ocurrir es f = 504 - 24 = 480. Por tanto, la probabilidad de sacar una tarjeta que cumpla la condición es $P = \dfrac{h}{h+f} = \dfrac{24}{24+486} = \dfrac{24}{504} = \dfrac{1}{28}$.

Ejemplo 3: en una bolsa hay 3 bolas blancas y 4 rojas. ¿Cuál es la probabilidad de sacar de la bolsa 5 bolas blancas y 6 rojas si simultánea y aleatoriamente se sacan de ella 7 bolas?

Solución: primero se calcula el número de modos en que 3 bolas blancas se pueden sacar de un conjunto de 5 bolas blancas, y como es una combinación, se tiene $_5C_3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{3!*2!} = 10$; ahora se calculan los modos en que 4 bolas rojas se pueden sacar de un conjunto de 6 bolas rojas, o sea $_6C_4 = \frac{6!}{4!(6-4)!} = \frac{6!}{4!*2!)} = 15$.

Luego se calculan los modos en que 7 bolas se pueden extraer de 11 bolas, es decir, $_{11}C_7 = \frac{11!}{7!(11-7)} = \frac{11!}{7!*4!)} = 330$. Por el principio de conteo se pueden hallar las combinaciones deseadas calculando $_5C_3 {*} _6C_4 = 10 * 15 = 150$ modos h. Por último, se busca la posibilidad de que el suceso ocurra usando la fórmula P= número de posibilidades favorables dividida entre el total de posibilidades, es decir $P = \frac{150}{330} = \frac{5}{11}$.

Ejemplo 4: hallar la probabilidad de sacar una suma de 8 puntos al lanzar un par de dados normales (no cargados).

Solución: el espacio muestral es:

1, 1	1, 2	1, 3	1, 4	1, 5	1, 6
2, 1	2, 2	2, 3	2, 4	2, 5	2, 6
3, 1	3, 2	3, 3	3, 4	3, 5	3, 6
4, 1	4, 2	4, 3	4, 4	4, 5	4, 6
5, 1	5, 2	5, 3	5, 4	5, 5	5, 6
6, 1	6, 2	6, 3	6, 4	6, 5	6, 6

Aquí, hay un total m de 36 sucesos y 5 casos (los de color rojo) favorables h. Luego:

$$P = \frac{h}{m} = \frac{5}{36}$$

Ejemplo 5: se escriben al azar las cinco vocales. ¿Cuál es la probabilidad de que la "e" aparezca en la primera posición y la "o" en la última.

Solución: al escribir al azar las 5 vocales tenemos $_5P_1 = \frac{5!}{1!} = 120$ casos posibles m.

De entre ellos, si la e ha de aparecer en la primera posición y la o en la última, las otras 3 vocales se han de permutar en los tres lugares centrales, es decir, los casos favorables

h son $_3P_1 = \frac{3!}{1!} = 6$. Luego la probabilidad pedida es: $P = \frac{h}{m} = \frac{6}{120} = \frac{1}{20}$.

Ejemplo 6: de una baraja española de 40 cartas ¿cuál es la probabilidad de sacar un caballo?

Solución: como en una baraja española hay 4 caballos, entonces $P = \frac{h}{m} = \frac{4}{40} = \frac{1}{10}$

FRECUENCIA RELATIVA

Si experimentalmente, en n intentos se obtienen h modos que cumplen cierta condición, entonces la razón $\frac{h}{n}$ se denomina frecuencia relativa.

Por ejemplo, si en el experimento de arrojar al aire tres monedas de cien pesos se efectuaron 300 lanzamientos y resultaron las tres monedas con sello en 37 casos, entonces la frecuencia relativa es $H = \frac{h}{n} = \frac{37}{300} \approx 0.123$; si al efectuar 350 lanzamientos las tres caen mostrando sello en 45 oportunidades, entonces la frecuencia relativa es $H = \frac{h}{n} = \frac{45}{350} \approx 0.128$.

Si se realizan n lanzamientos, con n suficientemente grande, se podrá comprobar que entre mayor sea la repetición de los lanzamientos tanto más cerca de la probabilidad $p = \frac{1}{8} = 0.125$ calculada en el ejemplo 1.

Cuando al efectuar n pruebas, con n bastante grande, acaece un suceso h veces, la probabilidad de que llegue a ocurrir al realizar otra prueba es $\frac{h}{n}$, razón que es utilizada por las compañías de seguros de vida, por ejemplo, para calcular los índices de mortalidad, como se muestra en la siguiente tabla, elaborada a partir de conjuntos de datos suministrados por grandes compañías de seguros de vida. Partiendo de 100.000 personas de diez, once, doce... hasta 99 años.

TABLA DE MORTALIDAD BASADA EN DATOS DE 100.000 PERSONAS

Edad	No. de personas	Personas que fallecen	Probabilidad anual de fallecimiento	Probabilidad anual de supervivencia	Edad	No. de personas	Personas que fallecen	Probabilidad anual de fallecimiento	Probabilidad anual de supervivencia
10	100 000	749	0.007 490	0.992 510	53	66. 797	1 091	0. 016333	0. 983 667
11	99 251	746	0.007 516	0.992 484	54	65. 706	1 143	0. 017395	0. 982 604
12	98 505	743	0.007 543	0.992 457	55	64. 593	1 199	0. 018571	0. 981 429
13	97 762	740	0.007 569	0.992 431	56	63. 364	1 260	0. 019885	0. 980 115
14	97 022	737	0.007 596	0.992 404	57	62. 104	1 325	0. 021335	0. 978 665
15	96 285	735	0.007 634	0.992 366	58	60. 779	1 394	0. 022936	0. 977 064
16	95 550	732	0.007 681	0.992 339	59	59. 385	1 468	0. 024720	0. 975 280
17	94 818	729	0.007 688	0.992 312	60	57. 917	1 546	0. 026693	0. 973 307
18	94 089	727	0.007 727	0.992 273	61	56. 371	1 628	0. 028880	0. 971 120
19	93 362	725	0.007 765	0.992 235	62	54. 743	1 713	0. 031292	0. 968 708
20	92 637	723	0.007 805	0.992 195	63	53. 030	1 800	0. 033943	0. 966 057
21	91 914	722	0.007 855	0.992 145	64	51. 230	1 889	0. 036873	0. 963 127
22	91 192	721	0.007 906	0.992 094	65	49. 341	1 980	0. 040129	0. 959 871
23	90 471	720	0.007 958	0.992 042	66	47. 361	2 070	0. 043707	0. 958 293
24	89 751	719	0.008 011	0.991 989	67	45. 291	2 158	0. 047647	0. 952 353
25	89 032	718	0.007 065	0.991 935	68	43 133	2 243	0. 052002	0. 947 998
26	88 314	718	0.007 130	0.991 870	69	40 890	2 321	0. 056762	0. 943 238
27	87 596	718	0.007 197	0.991 803	71	38 569	2 391	0. 061993	0. 938 007
28	86 878	718	0.007 264	0.991 736	71	36 178	2 448	0. 067565	0. 932 335
29	86 160	719	0.008 345	0.991 655	72	33 730	2 487	0. 073733	0. 926 267
30	85 441	720	0.008 427	0.991 573	73	31 243	2 505	0. 080178	0. 919 822
31	84 721	721	0.008 510	0.991 490	74	28 738	2 501	0. 087028	0. 912 972
32	84 000	723	0.008 607	0.991 393	75	26 237	2 476	0. 094371	0. 906 629
33	83 277	726	0.008 718	0.991 282	76	23 761	2 431	0. 102311	0. 897 689
34	82 551	729	0.008 831	0.991 169	77	21 330	2 369	0. 111064	0. 888 936
35	81 822	732	0.008 946	0.991 054	78	18 961	2 291	0. 174297	0. 879 173
36	81 090	737	0.009 089	0.990 911	79	16 670	2 196	0. 158505	0. 868 266
37	80 353	742	0.009 234	0.990 766	80	14 474	2 091	0. 144466	0. 955 534
38	79 611	749	0.009 408	0.990 592	81	12 383	1 964	0. 031734	0. 841 395
39	78 862	756	0.009 586	0.990 414	82	10 419	1 816	0. 120827	0. 825 703
40	78 106	765	0.008 794	0.990 206	83	8 603	1 648	0. 191561	0. 808 439
41	77 341	774	0.010 008	0.989 992	84	6 955	1 470	0. 211359	0. 788 641
42	76 567	785	0.010 252	0.989 748	85	5 485	1 292	0. 235552	0. 764 448
43	75 782	797	0.010 517	0.989 483	86	4 193	1 114	0. 265681	0. 734 319
44	74 985	812	0.010 829	0.989 171	87	3 079	933	0. 303020	0. 696 980
45	74 173	828	0.011 163	0.988 837	88	2 146	744	0. 346592	0. 653 308
46	73 345	848	0.011 562	0.988 418	89	1 402	555	0. 395563	0. 604 137
47	72 497	870	0.012 000	0.988 000	90	847	385	0. 454546	0. 545 455
48	71 627	896	0.012 509	0.987 491	91	462	246	0. 532468	0. 467.532
49	70 731	927	0.013 106	0.986 894	92	216	137	0. 634259	0. 365 741
50	69 804	962	0.013 781	0.986 219	93	79	58	0. 734177	0. 365 823
51	68 842	1001	0.014 541	0.985 450	94	21	18	0. 857143	0. 143 857
52	67 841	1044	0.015 389	0.984 611	95	3	3	1. 000.000	0. 000 000

Ejemplo: de acuerdo con la tabla anterior, ¿cuál es la probabilidad de que una persona de 40 años de edad sobreviva hasta que tenga 60 años?

Solución: en la tabla se ve que de cada 78106 personas de 40 años de edad 57917 pueden llegar a los 60 años, o sea que n = 78106 y h = 57917. Luego la probabilidad esperada es $\frac{h}{n} = \frac{57917}{78106} \approx 0.7415$

La teoría de probabilidades, además de utilizarse en los juegos de suerte y azar y para calcular los costos de las pólizas de seguros, menciono otras actividades humanas en donde deba tenerse en cuenta.

Para comprobar el avance en el conocimiento e interiorizar conceptos, con el subgrupo desarrollamos lo siguiente, comparamos los resultados con los de otros subgrupos, discutimos y socializamos y compartimos con el profesor.

Resolver las siguientes situaciones:

1. Hallar la probabilidad de sacar por suma o bien 4, o bien 11 al lanzar dos dados normales. (5/36).

2. Un equipo de fútbol está integrado por 3 estudiante de octavo, 4 de décimo 4 de undécimo. Si en el primer juego se lesiona un jugador, calculo la probabilidad de que sea a) De octavo (3/11); b) De undécimo (4/11).

3. Si se tira una sola vez un dado, calculo la probabilidad de que aparezcan a) un cuatro (1/6); b) un número par (1/2); c) un número divisible por 3 (1/3); d) un número primo (1/2).

4. Al lanzar dos veces un dado ¿cuál es la probabilidad de que la suma de puntos sea divisible por tres? (1/3).

5. Mediante la tabla de mortalidad que se mostró antes, hallar la probabilidad de que un joven de 19 años pueda vivir hasta la edad de 41 años. (0.8284 aproximadamente)

6. Usando la misma tabla, calcular la probabilidad de que una persona de 21 años pueda morir antes de alcanzar a) 22 años; b)31 años. (0.007855, 0.7826 aproximadamente).

Como aplicación a los conceptos de probabilidad, con un compañero desarrollamos los siguientes problemas de aplicación.

1. De acuerdo con los resultados obtenidos en los ejercicios 1 y 2 de la guía anterior, calculamos la probabilidad de acertar el premio mayor de la lotería comprando un solo billete o de ganar el acumulado del baloto sellando un solo formulario.

2. De acuerdo con sus edades, usen la tabla de mortalidad mostrada antes y calculen la probabilidad de vivir hasta los 50 años y la probabilidad de morir antes de llegar a los 50 años.

3. En el "Gana Gol" se dan los nombres de 14 encuentros de fútbol y el apostador debe marcar una y sólo una de 3 posibilidades: L, E, V, según que gane el equipo local o que el resultado sea un empate o que gane el equipo visitante, respectivamente.

   Usen el principio de conteo para calcular cuántos formularios deben elaborarse para garantizar que se acertarán los 14 resultados y luego hallen la posibilidad que un apostador tiene de ganar si sella un solo formulario.

ESTUDIO Y ADAPTACIÓN DE LA GUÍA

RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS PLANTEADOS EN C PARA LAS UNIDADES 1 A 6

UNIDAD 1
GUÍA 1

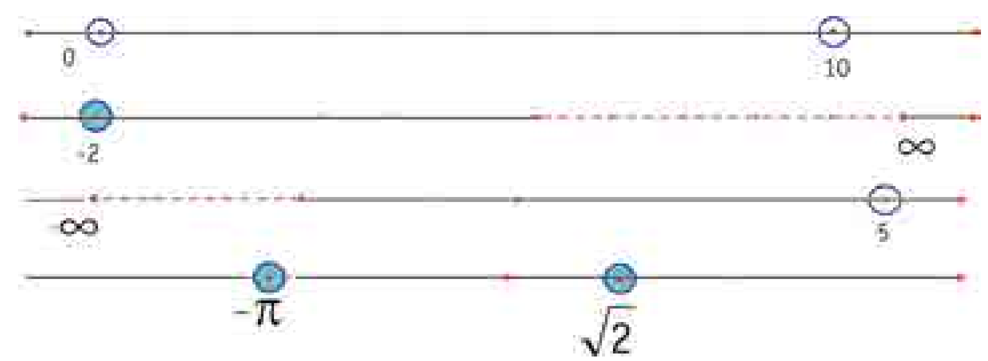
1)

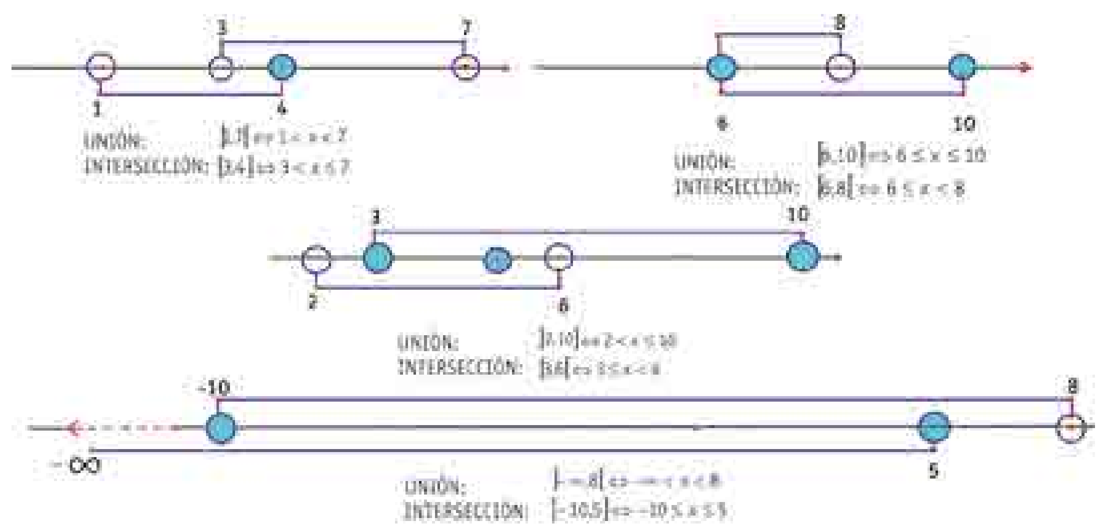
Números \ Conjunto	N	Z	Q	Q'	R
8	$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$
-8	$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$
$\frac{2}{3}$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$
2.32444...	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$
$\sqrt[5]{32}$	$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$

2. $Z \subset Q$; $Q \subset \Re$; $Z \not\subset N$; $Q \not\subset Z$; $\{0\} \subset Z$

GUÍA 2

A = { 4 }; B= { }; C = { -2, 3 }; D = { }





GUÍA 3

1. 5 es: natural, entero, racional, real. $-\dfrac{3}{2}$ es: racional, real.

   $\sqrt{8}$ es: irracional, real. $\sqrt[3]{-27}$ es: entero, racional, real.
   3.81717... es: irracional, real.

2. Todo natural es entero: V, porque naturales están incluidos en los enteros.

Todo real es racional: F, porque existen reales que son irracionales.

Algunos reales son irracionales: V, porque los reales están conformados por los racionales y los irracionales.

En los reales se pueden realizar todas las operaciones de la aritmética: F, porque en los reales no se puede dividir por cero ni extraer raíces de grado par ni tampoco logaritmo a los reales negativos.

Cualquier subconjunto de los reales es un intervalo: F, porque hay intervalo si existe un segmento de recta.

$\dfrac{a}{0}$ y $\dfrac{0}{0}$ son racionales: F, porque la división por cero no está definida.

Cualquier real se puede expresar como un desarrollo decimal: V, por definición de número real.

UNIDAD 2
GUÍA 1

1. F = {(4, 4), (5, 5)}; G = {(1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 4), (2, 6), (3, 6), (4, 4), (5, 5)};
   H = {(4, 4), (5, 5), (5, 4)}; J = {(2, 4)}; K = {(2, 4), (3, 5), (4, 6)}.

2. F = {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)}; H = {(2,1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)};
   G = {(1, 1), (1, 2), (1, 3),(1, 4), (1, 5), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (3, 6), (4, 4), (5, 5)};
   J = {(1, 1), (2, 4)}; K = {(1, 3), (2, 4), (3, 5)}.

3. a. D = $\Re$; R = $\left]-\infty, \dfrac{6}{5}\right]$.

   b. D = $\Re$R; R = $\left]-\infty, -\dfrac{2}{3}\right]$.

   c. D = R = $\Re$.

   d. D = $\Re \neq 0$; C = $\Re \neq -2$.

   e. D = $\Re \neq 0$; R = $\left]-\infty, -4\sqrt{3}\right] \cup \left]4\sqrt{3}, \infty\right]$.

4. a. Es función;
   b. No es función;
   c. No es función;
   d. No es función.

5. a. Es función porque a cada entero negativo le corresponde un solo natural.
   b. Sí es función porque a cada real se le asocia la constante.
   c. Sí es función porque a cada real se le asocia un real único.
   d. Sí es función porque a cada natural se le asocia otro natural único.
   e. Sí es función porque a cada miembro de mi familia se le asocia un entero único que es su edad.

GUÍA 2

1. a. Creciente, divergente;
   b. Decreciente, divergente;
   c. Decreciente, convergente;
   d. Creciente, convergente;
   e. Oscilante.

2. a. 1; b. 2;
   c. ¼; d. 0; e. 0.

3. a. 0; b. ¼;
   c. 4; d. ¼; e. 6.

UNIDAD 3
GUÍA 1

1. a. -5; b. 4;
   c. 2; d. 0.1

2. a. 4; b. -1.1;
   c. $x + \Delta_x$; d. $y + \Delta_y$

3. a. 1.44; b. 6.25;
   c. -0.065; d. 0.549

4. a. 2; b. 5.55;
   c. -5.333; d. 6.8

5. a. 32.5 m/seg; b. 15 m/seg;
   c. 19 m/seg

6. 333.33 pesos/mes

7. 42083 habitantes/año aproximadamente.

8. a. $3x^2 - 1$; b. $-\frac{3}{x^2} + 1$;
   c. $-\frac{6}{x^3} + \frac{1}{x^2}$;

GUÍA 2

1. a. $15x^2 - 6x + 6$; b. $-12(2x-3)^3$; c. $\frac{x-3}{\sqrt{x^2 - 6x + 3}}$
   d. $x^2 - x + 1$; d; e. $-\frac{2}{x^3} - \frac{21}{x^4}$; f. $3x^2(3x-2)(5x-2)$;

g. $\frac{13}{(x-6)^2}$; h) $2x - 1$; i. $\frac{2x+3}{2(y-2)}$; j. $-\frac{y(2x+y)}{x(x+2y)}$

UNIDAD 4
GUÍA 1

1. a. Tangente: 4X - Y -2 = 0; normal: X + 4Y - 9 = 0.

   b. Tangente: 9X - Y - 6 = 0; normal: X + 9Y - 28 = 0.

   c. Tangente: 9X + Y - 6 = 0; normal: X - 9Y + 54 = 0.

2. (1, -4) y (-1, -2).

3. Tangente: 2X - Y + 4 = 0; normal: X + 2Y - 18 = 0; la tangente es paralela al eje X en el punto P(3, 9).

4. a. Por los puntos A(2, 13) ó B(-2, -3) pasan paralelas a la recta dada.

   b. Hay dos perpendiculares a la recta dada: una por C(1, 6) y otra por D(-1, 4).

5. a. Tangente: 7X - 4Y - 2 = 0; normal: 4X + 7Y - 29 = 0.

   b. Tangente: 3X - 4Y - 25 = 0; normal: 4X + 3Y = 0.

6. a. X = 0; b. X = 2; c. $x = +\sqrt{3}$ ó $x = -\sqrt{3}$; d) X = -1.

GUÍA 2

1. Crece en $]-\infty, 0[$; decrece en $]0, \infty[$
2. Crece en $]-\infty, -3[\cup]2, \infty[$; decrece en $]-3, -2[$
3. Crece en $\left]-2, -\frac{1}{2}\right[\cup]1, \infty[$; decrece en
4. Crece en $\left]-1, \frac{1}{2}\right[\cup]2, \infty[$; decrece en $]-\infty, -1[\cup \left]\frac{1}{2}, 3\right[$
5. Crece en $]-\infty, 1[\cup]3, \infty[$; decrece en $]1, 3[$

GUÍA 3

1. **Valores críticos:** -1 y 3; crece en $]-\infty,-1[\cup]3,\infty[$; decrece en $]-1,3[$; hay un máximo relativo en A(-1,15); hay un mínimo relativo en B(3, -17); hay una inflexión en C(1,9).

2. **Valor crítico:** 4; crece en $]-\infty,4[$; decrece en $]4,\infty[$; hay un máximo relativo en A(4, 10).

3. **Valor crítico:** 2; inflexión en A(2, 1); crece en $]-\infty,2[\cup]2,\infty[$.

4. **Valores críticos:** -3 y 3; crece en $]-\infty,-3[\cup]3,\infty[$; decrece en $]-3,3[$; hay un máximo relativo en A(-3,70); hay un mínimo relativo en B(3, -38); hay una inflexión en C(0, 16).

5. **Valores críticos:** 1 y 5; crece en $]-\infty,1[\cup]5,\infty[$; decrece en $]1,5[$; hay un máximo relativo en A(1,2); hay un mínimo relativo en B(5, -30); hay una inflexión en C(3, -14).

6. **Valores críticos:** -2, 0 y 2; crece en $]-2,0[\cup]2,0[$; decrece en $]-\infty,-2[\cup]0,2[$; hay un mínimo relativo en A(1, -3); hay un máximo relativo en B(0, 16); hay un mínimo relativo en C(1, 1); hay inflexión en $E\left(-\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{64}{9}\right)$ y en $E\left(\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{64}{9}\right)$.

7. **Valores críticos:** -1, 0 y 1; hay un máximo relativo en A(-1, 1); hay un mínimo relativo en B(0, 0); hay un máximo relativo en C(1, 1); hay inflexión en $D\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{5}{9}\right)$ y en $E\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{5}{9}\right)$; crece en $]-2,0[\cup]2,0[$; decrece en $]-1,0[\cup]1,\infty[$.

8. **Valor crítico:** 1; hay un mínimo relativo en A(1, -3); hay inflexión en B(0, 0); crece en $]-\infty,-2[$ y decrece en $]-\infty,1[$.

9. **Valores críticos:** 2 y -1; hay máximo relativo en A(-2, 16); hay mínimo relativo en B(1, -11); hay inflexión en C(-3, 5); crece en $]-\infty,-2[\cup]1,\infty[$; decrece en $]-2,1[$.

10). **Valores críticos:** -3 y 1; hay un máximo relativo en A(-3, -5); hay mínimo relativo en B(1, 3); crece en $]-\infty,-3[\cup]1,\infty[$; decrece en $]-3,1[$.

GUÍA 4

1. a) 10 y 10; b) 10 y 10; c)
2. Es un cuadrado de lado $5\sqrt{2}$
3. Largo = ancho = 6 dm; altura = y = 3 dm.
4. Largo = $\frac{35}{3}$ dm; ancho = $\frac{14}{3}$ dm; altura = $\frac{5}{3}$ dm.
5. Largo = 18 cm; ancho = 9 cm.
6. Los catetos miden $\frac{20\sqrt{3}}{3}$ cm y $\frac{20\sqrt{6}}{3}$ cm
7. Radio = $\frac{10\sqrt{6}}{3}$ cm y altura = $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ cm
8. Altura = 12 cm y Radio base = $8\sqrt{2}$ cm
9. La distancia es mínima entre los barcos 2 horas después de iniciado el movimiento y su valor es $15\sqrt{13}$ Km.

GUÍA 5

1. a. $V = -48\frac{m}{Seg}$; $a = -32\frac{m}{Seg^2}$

   b. $V = -3\frac{m}{Seg}$; $a = 18\frac{m}{Seg^2}$;

   c. $V = \frac{1}{2}\frac{m}{Seg}$ y $a = \frac{3}{4}\frac{m}{Seg^2}$;

   d. $V = \frac{95}{4}\frac{m}{Seg}$ y $a = \frac{195}{32}\frac{m}{Seg^2}$

2. $9\frac{cm^2}{Seg}$;
3. $\frac{8}{5\pi}\frac{dm}{\min}$;

4. $\frac{2}{9\pi}\frac{m}{\min}$;

5. $\frac{3}{2}\frac{m}{seg}$;

6. a. $\frac{1}{2}$; b. $\frac{1}{4}$; c. 4

UNIDAD 5
GUÍA 1

1. a. 4Cos(4x);

   b. 3Cos(3x+1);

   c. $\frac{3}{Cos^2(3x)}$;

   d. $-6(3x+1)Sen(3x+1)^2$;

   e. $-3x^2Csc^2(x^3)$;

   f. $(2x+1)Sec(x^2+x+1)Tan(x^2+x+1)$;

   g. $-3Cot^2(x)Csc^2(x)$;

   h. *-2Cot(2x)Csc(2x);* *i)* $6Sen^2(2x)Cos(2x)$;

   j. $3x^2Cos(x^3)Sec(2x)+2Sen(x^3)Tan(2x)Sec(2x)$; k) $\frac{-2Cos^2(x)}{Sen^3(x)}-\frac{1}{Sen(x)}$;

   l. $x(xCos(x)+2Sen(x))$;

   m. $-3Sen(2x)Sen(x)+6Cos(2x)Cos(x)$;

   n) $\frac{xCos(x^2)}{ySen(y^2)}$; *o)* $\frac{Cos(x)Cos(y^2)}{2ySen(x)Sen(y^2)-1}$.

2. a. {45°, 135°, 225°, 315°};

   b. {0°, 180°, 360°}.

GUÍA 2

1. $2^2=4$;
2. $5^3=125$;
3. $9^{-2}=\frac{1}{81}$;
4. $10^3=1000$;
5. $10^{-2}=0.01$;
6. $3^{-3}=\frac{1}{27}$;
7. $10^{-3}=\frac{1}{1000}$;
8. $e^0=1$;
9. $125^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{5}$;
10. $b^y=x$;
11. $Log_5 25=2$;
12. $Log_3 27=3$;
13. $Log 10000=4$;
14. $Log\frac{1}{100}=-2$;
15. $Log_2\frac{1}{8}=-3$;
16. $Log_2 1=0$;
17. $Log_{36} 6=\frac{1}{2}$;
18. $Log_8 2=\frac{1}{3}$;
19. $Log_{27} 81=\frac{4}{3}$;

20. $Log_{16}\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}$;

21. X=25;

22. X=4;

23. $\frac{1}{5}$;

24. X=1000;

25. X= e^{-2};

26. $X=\frac{1}{\sqrt{e}}$;

27. X=16;

28. X=512;

29. X=2;

30. X=11;

31. $10^{x}\ln x$;

32. $2x * 2^{x}\ln 2$;

33. $\left(\frac{3}{4}\right)^{x}\ln\left(\frac{3}{4}\right)$;

34. -Tan(x)Log(e);

35. $-7^{Cos(x)}\ln(7)Sen(x)$;

36. $2^{x}3^{x^{2}}\left(2x\ln(3)+\ln(2)\right)$;

37. $\frac{2^{\ln(x)}\ln(2)}{x}$;

38. $\frac{Log_3 e}{x}$;

39. $\pi^{x}\ln(\pi)+\pi x^{\pi-1}$;

40. $\frac{xy+1+2e^{2x}}{x^{2}-2xy}$.

UNIDAD 6
GUÍA 1

1. a. $y^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}+C$;

   b. $\sqrt{y}=\frac{1}{3}x\sqrt{x}+C$;

   c. $-\frac{1}{y}=2xdx+C$;

   d. $S=t^{3}+2t^{2}-6t+C$.

2. a. $\frac{x^{6}}{6}+C$;

   b. $x^{4}+x^{3}+x^{2}-5x+C$;

   c. $-\frac{1}{x}+C$;

   d. $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+C$;

   e. $\frac{1}{2}x^{2}+5x+\frac{4}{x}+C$;

   f. $\frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^{2}}+C$;

   g. $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^{2}}+C$;

   h. 2$Sen(x)$-3$Cos(x)$+C;

   i. $\frac{x^{4}}{2}-\frac{5x^{3}}{3}-\frac{3x^{2}}{2}+4x+C$;

   j. $\frac{1}{3}(x+3)^{3}+C$;

   k. $\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-\frac{6}{5}x^{\frac{5}{3}}+\frac{10}{3}x^{\frac{3}{2}}-3x+C$;

   l. $2x^{2}-2\sqrt{x}+C$;

   m. $\frac{6}{5}x^{2}\sqrt{x}-\frac{4}{3}x\sqrt{x}+C$

3. a. $y = x^2 + 3x + 6$;

b. $y = x^3$;

c. $y = \frac{1}{3}x^2 + \frac{3}{2}x^2 + 2x$

GUÍA 2

1. $\frac{(x^3+2)^3}{3} + C$;
2. $\frac{2}{9}(x^3+2)^{\frac{3}{2}} + C$;
3. $\frac{4}{9}(x^3+2)^{\frac{3}{4}} + C$;
4. $-\frac{1}{2}(1-2x^2)^{\frac{3}{2}} + C$;
5. $\frac{3}{4}(2x+6)^{\frac{2}{3}} + C$;
6. $-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + C$;
7. $-\frac{1}{6}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + C$;
8. $\frac{1}{2}\ln(x^2-1) + C$;
9. $-2Cos\left(\frac{x}{2}\right) + C$;
10. $\frac{1}{3}Sen(3x) + C$;
11. $\frac{1}{3}Sen^3(x) + C$;
12. $-lnCos(x)+C$:
13. $\ln\left(Sec(x) + Tan(x)\right) + C$;
14. $\frac{1}{2a}Tan(2ax) + C$;
15. $x-lnCos(x)+C$
16. $Sec(y)+C$;
17. $Tan(x)$ - $2lnCos(x) + C$;
18. $-\frac{1}{6}e^{3Cos(2x)} + C$;
19. $Csc(x)$-$Cot(x)$.
20. $Tan(2x) + Sec(2x) - x + C$

GUÍA 3

1. $\frac{5}{3}\ln(x-1) - \frac{3}{2}\ln(x) - \frac{1}{6}\ln(x+2) + C$;
2. $2\ln(x-1) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+2}{x}\right) + C$;
3. $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{(x-1)^3}{x+1}\right) + \frac{1}{x+1} + C$;
4. $\ln\left(\frac{(x-1)^2}{x}\right) - \frac{x}{(x-1)^2} + C$;
5. $\frac{1}{4}\ln(2x+1)^2(2x-1)^4 - \ln(x) + x + C$;
6. $-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{(2x+1)(2x+3)}{x^2}\right) + C$;
7. $2\ln(x^2+2x) + \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{4}{x} + C$;
8. $x - \frac{2}{x} - \ln\left(\frac{x-1}{x^2}\right) + C$;
9. $\ln(x^2) + \ln(x^2+3) + C$

GUÍA 4

1. {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20};
2. {1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19};
3. {1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000};
4. {1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100};
5. {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}.

BIBLIOGRAFÍA

AYRES Jr., Frank, Cálculo Diferencial e Integral, Carvajal Colombia, 1969.

C.H., Edwards, Jr. y PENEY, E. David, Cálculo con Geometría Analítica, México, Prentice Hall Hispanoamericana, S.A., 1994.

GONZÁLEZ, Marcos y otros, Matemática Práctica 11, Bogotá, Editorial Norma.

GRANVILLE, William A., Cálculo Diferencial e Integral, Unión Tipográfica Editorial Hispano-Americana, México, 1952.

HOPKINS, Kenneth D. y otro, Estadística Básica, México, Prentice Hall Hispanoamericana, 1997.

K. REES, Paul y otro, Álgebra, México, Editorial Reverte, 1966.

LIPSCHUTZ, Seymour, Teoría de Conjuntos y Temas Afines, Carvajal Colombia, 1969.

PINZÓN E., Álvaro, Conjuntos y Estructuras, México, Editorial Tec-Cien Ltda., 1975.

PINZÓN G., Álvaro, Estadística, Bucaramanga, Publicaciones UIS, 1985.

THOMAS Jr., George B., Cálculo Infinitesimal y Geometría Analítica, Madrid, Aguilar S.A. de Ediciones, 1966.

URIBE CÁLAD, Julio A. y otros, Elementos de Matemáticas 11, Medellín, Editorial Bedout.

WILLS, Darío y otros, Matemática Moderna Estructurada 11, Bogotá, Editorial Norma.

Páginas Web:

http://thales.cica.es/rd/recursos/rd98/matematicas/20/matematicas-20.html

http://www.terra.es/personal/jftjft/algebra/ecuaciones/problemas/prinecu.htm

http://platea.pntic.mec.es/~anunezca/ayudas/factorizacion/factorizacion_polinomios.htm

http://www.gfc.edu.co/estudiantes/anuario/2001/sistemas/natalia/latex/node4.html

http://www20.brinkster.com/fmartinez/algebra4.htm

http://www.mate.com.mx/algebra/trinomios.htm