UNIDAD 3

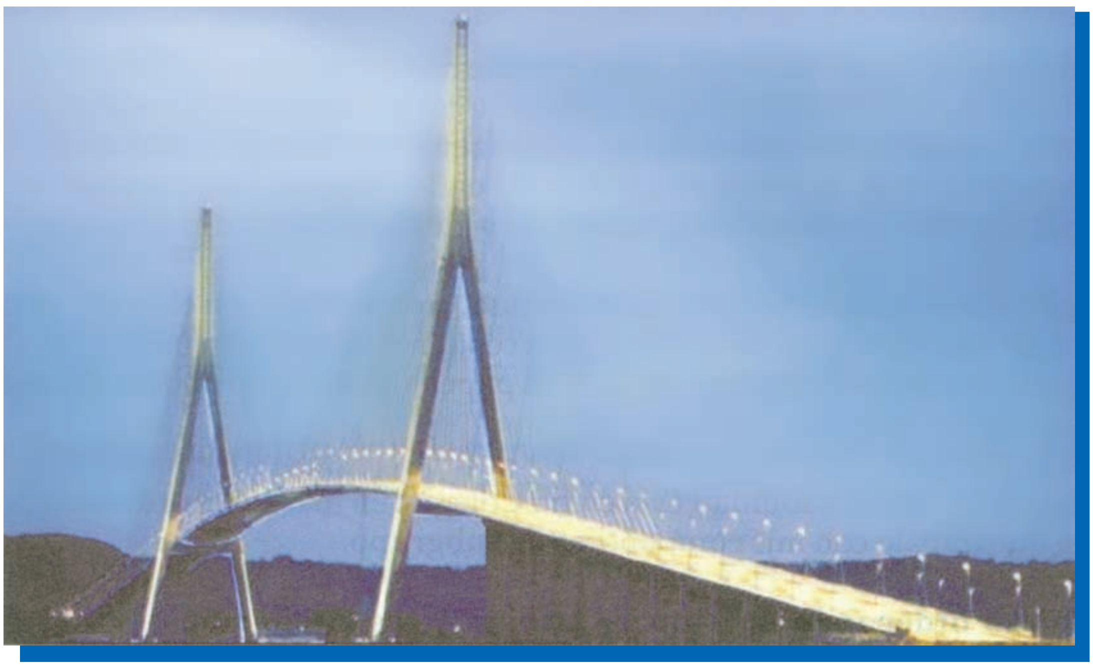
¿CÓMO SE RESUELVE UN TRIÁNGULO?

LOGROS

- ✓ Interpreta y resuelve problemas de la vida cotidiana que requieren la solución de un triángulo rectángulo.
- ✓ Resuelve triángulos isósceles y equiláteros haciendo uso de los elementos y propiedades de los triángulos rectángulos.
- ✓ Identifica y aplica las leyes del seno y coseno en la resolución de triángulos.
- ✓ Aplica los métodos de solución de un triángulo cualquiera para interpretar y resolver problemas de la vida real.
- ✓ Contribuye con su actitud y comportamiento a mejorar el ambiente (RESPONSABILIDAD AMBIENTAL).
- ✓ Maneja acertadamente el conflicto y contribuye positivamente a su solución (MANEJO DEL CONFLICTO).
- ✓ Resuelve problemas en forma acertada y oportuna (SOLUCIÓN DE PROBLEMAS).
- ✓ Reconoce y valora sus potencialidades y limitaciones, emocionales, afectivas e intelectuales (COMPETENCIA PERSONAL).

Guía 1

UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO ES MUCHO MÁS QUE TENER UN ÁNGULO DE 90°



Indicadores de logros

- ✓ Reconoce los elementos de un triángulo rectángulo en un problema dado.
- ✓ Resuelve triángulos rectángulos conociendo un ángulo agudo y la hipotenusa, un cateto y un ángulo agudo, la hipotenusa y un cateto y los dos catetos.
- ✓ Aplica los conceptos de ángulos de inclinación y depresión en la solución de problemas cotidianos.
- ✓ Hace uso racional de los recursos naturales (RESPONSABILIDAD AMBIENTAL).
- ✓ Mantiene ordenado su sitio de trabajo.
- ✓ Participa activamente en los proyectos de mejoramiento ambiental, que permiten su vinculación.
- ✓ Se compromete positivamente en la solución de los problemas que afectan al medio ambiente.
- ✓ Reconoce y analiza diferentes problemas del medio ambiente.

Los problemas ambientales son mis problemas y los de mi comunidad

Con los compañeros de subgrupo, leemos y comentamos el siguiente contenido.

En esta guía tendremos en cuenta la RESPONSABILIDAD AMBIENTAL, definida como la capacidad para relacionarse de una manera racional y armónica con el ambiente.

La responsabilidad ambiental debe constituirse en un valor que trasciende de lo individual a lo comunitario y se enriquece con su reflexión permanente desde el ámbito escolar, constituyéndose en un factor decisivo para el éxito de la vida institucional y de la comunidad. Basado en lo anterior, debo pensar en cómo puedo contribuir en el aprovechamiento y cuidado del medio ambiente.

Mi primera responsabilidad está en mi casa, en colaborar con el aseo y orden de las cosas (un lugar para cada cosa y cada cosa en su lugar) y en hacer uso racional de los servicios (no malgastar el agua, el papel higiénico, no abusar del teléfono, la televisión, etc.).

Mi segunda responsabilidad está en mi Colegio, en mantener ordenada la mesa en la que trabajo con mis compañeros de subgrupo.

Empiezo ordenando mi sitio de trabajo y los alrededores.

Mi tercera responsabilidad es participar activamente en un proyecto de mejoramiento ambiental en el entorno en que vivo, que será definido más adelante.

A UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO ES MUCHO MÁS QUE TENER UN ÁNGULO DE 90°

En esta Unidad nos daremos cuenta de la importancia de los triángulos, especialmente de los triángulos rectángulos.

Bajo la coordinación del ayudante de subgrupo, realizo las siguientes actividades:

1. Respondo oralmente las siguientes preguntas:
   a. ¿Qué es un triángulo rectángulo?

b. ¿Cuánto suman los ángulos agudos de un triángulo rectángulo?
c. ¿Cómo se llaman los lados de un triángulo rectángulo?
d. ¿Cuál es el teorema más importante sobre triángulos rectángulos?
e. ¿Qué dice ese teorema?

2. Dibujo en mi cuaderno:

a. Un triángulo rectángulo con todos sus elementos.
b. Un triángulo rectángulo isósceles y coloco las medidas de sus lados en centímetros.
c. Un triángulo rectángulo con un ángulo de 37°. ¿Cuánto mide el otro ángulo agudo? y ¿Cuánto miden sus lados?

3. Aplico el Teorema de Pitágoras para comprobar la exactitud de las medidas del triángulo anterior.

4. Si un lado de un triángulo rectángulo mide 5 cm. y la hipotenusa mide 13 cm. ¿Cuánto mide el otro lado? Compruebo mi respuesta.

5. Los conceptos matemáticos y de geometría son básicos para el desarrollo de la ingeniería. ¿Qué aplicación tendrían estos conceptos en el Medio Ambiente?

Socializo mis respuestas ante mis compañeros y el profesor.

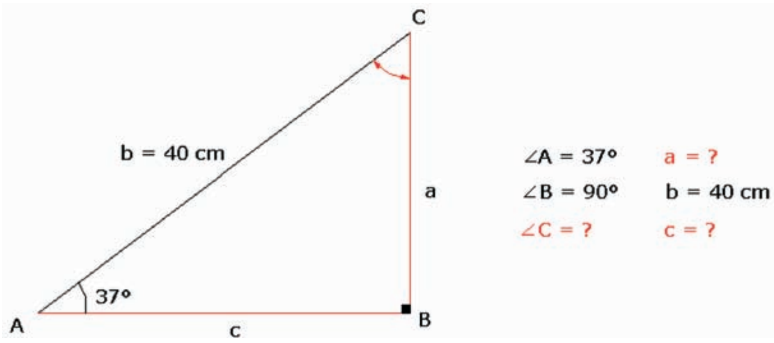
SOLUCIONEMOS TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Analizo los siguientes ejemplos donde se resuelven solamente triángulos rectángulos. Resuelvo en mi cuaderno los ejercicios propuestos.

Resolver un triángulo consiste en calcular los lados y ángulos de un triángulo, cuando se conocen algunos de ellos.

EJEMPLO 1. **Se conoce un ángulo agudo y la hipotenusa.**

Resuelvo un triángulo ABC rectángulo en B, si la longitud de su hipotenusa es 40 cm. y el ángulo en A tiene 37^0.



Cálculo de $\angle$C

Por ser el ΔABC rectángulo, los ángulos A y C son complementarios.

$\angle C = 90 - \angle A = 90° - 37° = 53°$

Cálculo de a

La función **seno** me permite escribir:

$$sen\ A = \frac{a}{b}$$

Despejo a:

a = b sen A
a = 40 cm. x sen 37°
a = 40 cm. x 0.6
a = 24 cm.

Cálculo de c

Si relaciono a c con los datos conocidos A y b.

$$\cos A = \frac{c}{b}$$

Despejo c

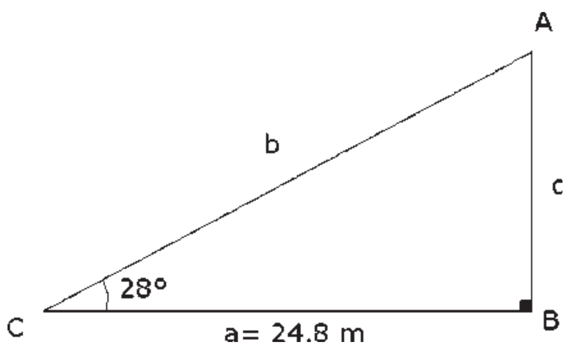
c = b cos A
c = 40 cm x cos 37°
c = 40 cm x 0.8
c = 32 cm.

EJERCICIOS.

Resuelvo el triángulo ABC, rectángulo en B, con los datos dados.

1. A = 34°, b = 12.7 cm.
2. A = 41°27′, b = 18.83 cm.
3. A = 27°15′10′′ b = 24.75 cm.
4. A = π/3, b = 1/2 ft.
5. A = π/12, b = 0.4 m.

EJEMPLO 2. **Se conoce un cateto y un ángulo agudo.**



Resuelvo el triángulo ABC de la figura, si a = 24.8 m y ∠C = 28°.

Debo averiguar:
∠A, "b" y "c".

Cálculo de ∠A

∠A = 90° – ∠C = 90° – 28° = 62°

Cálculo de "b"

Debo relacionar a "b" con los datos conocidos "a" y ∠C. La función coseno me permite hacerlo.

$$\cos C = \frac{a}{b}$$

DespeJo "b":

$$b = \frac{a}{\cos C}$$

$$b = \frac{24.8\ m}{\cos 28°} = \frac{24.8\ m}{0.883} = 28.1\, m \quad \approx 28 \text{ m}$$

Cálculo de "c"

La función tangente me relaciona el valor de "c" con los valores conocidos.

$\tan C = \dfrac{c}{a}$

Despejo c:

c = a tan C
c = 24.8 m x tan 28°
c = 24.8 m x 0.532

c ≈ 13.2 m.

EJERCICIOS.

Resuelva el triángulo ABC rectángulo en B, con los datos dados.

1. a = 50 cm, $\angle C = 57°$
2. $\angle C = 72° \, 46'$, a = 75 cm
3. a = 0.036 Km, $\angle C = 40° \, 20' 10''$.
4. a = $\sqrt{3}$ m., $\angle C = \dfrac{\pi}{15}$

Pensemos un poco en el proyecto de mejoramiento ambiental. Uno de los problemas ambientales se genera con las prácticas que agotan y empobrecen los suelos como el monocultivo, el pastoreo libre o excesivo, las quemas de sabanas y matorrales; todo esto deja las tierras expuestas al peligro de la erosión.

Podemos pensar en dos soluciones:

a) Hacer un proyecto de investigación sobre prácticas para evitar la erosión: rotación de cultivos, cultivos en contornos, cultivos en franjas, zanjas de ladera, barreras vivas, terrazas, cultivos de cobertura, cortinas rompevientos, diques de retardación y revegetación. Por subgrupos investigarán cada tema y luego pueden socializar los trabajos con la comunidad. **Los trabajos deberán tener aplicaciones trigonométricas en lo que se relaciona con longitudes, perímetros, pendientes, áreas.**

b) Preparar abono orgánico (compost) para crear un ambiente propicio para el desarrollo de los microorganismos encargados de la degradación de la materia orgánica y controlar parámetros físicos, químicos y biológicos; para obtener un **compost** de buena calidad, deben tenerse en cuenta las siguientes indicaciones:

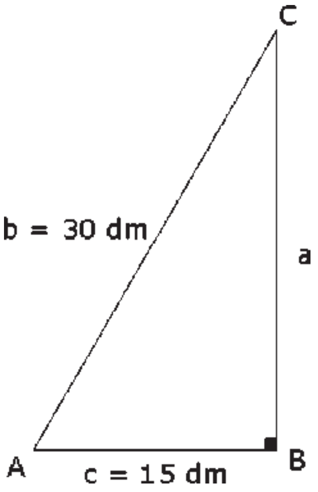
* Construcción de la fosa o cerca.
* Selección y localización de material para cargar la fosa.
* Relleno por capas.

En la construcción de la fosa se recomienda una medida de 9 m de largo por 4 m de ancho y 90 cm. de profundidad. La fosa debe hacerse con una ligera pendiente. **Utilice los conocimientos de trigonometría para los cálculos correspondientes.**

Volvemos a la trigonometría para seguir analizando los ejemplos. Consigno los ejercicios resueltos en el cuaderno.

EJEMPLO 3. **Se conoce la hipotenusa y un cateto**

Resuelvo un triángulo ABC, rectángulo en B, si el cateto c mide 15 dm y la hipotenusa b = 30 dm. Además, encuentro su área.



Valores conocidos:

$\angle B = 90°$
$c = 15$ dm.
$b = 30$ dm.

Valores desconocidos

$a = ?$
$\angle A = ?$
$\angle C = ?$
Área = ?

MANTENGA ORDENADO SU SITIO DE TRABAJO

Cálculo de "a"

Aplico el Teorema de Pitágoras

$a^2 + c^2 = b^2$

$$a = \sqrt{b^2 - c^2} = \sqrt{30^2 - 15^2} = \sqrt{900 - 225} \approx 26 \text{ dm.}$$

Cálculo de $\angle A$

$$\cos A = \frac{c}{b} = \frac{15\ dm}{30\ dm} = 0.5$$

$\angle A = \boxed{60°}$ ($\boxed{0}$ $\boxed{.}$ $\boxed{5}$ $\boxed{\text{INV}}$ $\boxed{\cos}$).

Cálculo de $\angle C$

$\angle C = 90° - 60° = \boxed{30°}$

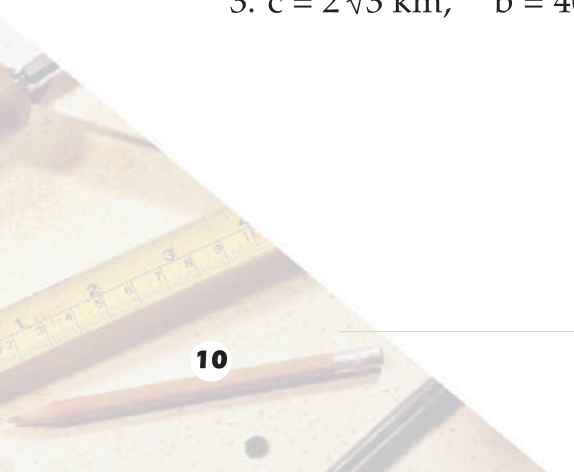
Cálculo del Área

$$\text{Área } \Delta \text{ ABC} = \frac{c \times a}{2}$$ (base × altura, dividido 2)

$$Área = \frac{15\ dm \times 26\ dm}{2} = 195 \text{ dm}^2$$

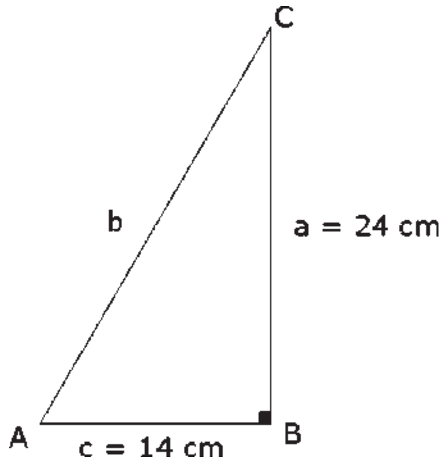
EJERCICIOS: Resuelva el triángulo ABC, rectángulo en B. Halle también el ÁREA.

1. b = 60 m, **c** = 43 m
2. c = 18.5 m, b = 37.9 m
3. c = $2\sqrt{3}$ km, b = 4000 m



EJEMPLO 4. **Se conocen los dos catetos**

Resuelvo un triángulo rectángulo ABC del que se conocen los catetos a = 24 cm. y c = 14 cm. Calculo también su área y perímetro.



Datos:
a = 24 cm
c = 14 cm
$\angle B = 90°$

Incógnitas:
$\angle A = ?$
$\angle C = ?$
b = ?

Área = ?
Perímetro = ?

Cálculo de "b"

Aplico el Teorema de Pitágoras

$b^2 = a^2 + c^2$

$$b = \sqrt{a^2 + c^2} = \sqrt{24^2 + 14^2} = 27.7848$$

$$\boxed{b \approx 28 \text{ cm.}}$$

Cálculo del ángulo A

La función tangente me relaciona el ángulo A con los dos catetos.

$$\tan A = \frac{a}{c} = \frac{24\ cm}{14\ cm} = 1.71428$$

$\angle A = 59°\ 44'\ 36.8''$ ($\boxed{1}\ \boxed{.}\ \boxed{7}\ \boxed{1}\ \boxed{4}\ \boxed{2}\ \boxed{8}\ \boxed{\text{INV}}\ \boxed{\text{tan}}$).

$\angle A \approx 59°\ 44'\ 37''$

Cálculo de $\angle C$

$\angle C = 90° - A = 90° - (59°\ 44'\ 37'') = 30°\ 15'\ 23''$

Cálculo del Área

$$\text{Área } \Delta\, ABC = \frac{c \times a}{2} = \frac{14\ cm \times 24\ cm}{2} = \boxed{168\ cm^2}$$

Cálculo del Perímetro

Perímetro = a + b + c

Perímetro = 24 cm. + 28 cm. + 14 cm. = $\boxed{\text{66 cm.}}$

EJERCICIOS. Resuelva el triángulo ABC, rectángulo en B. Halle también su área y perímetro.

1. a = 200 Km., b = 354 Km.
2. c = 31.6 cm., a = 12.3 cm.

Demostremos actitud positiva hacia los problemas que afectan el medio ambiente. Analizo con mis compañeros de subgrupo algunos apartes del artículo "S.O.S POR LOS RECURSOS NATURALES" escrito por Guillermo Ceballos Espinosa en La Patria del domingo 21 de marzo de 2004.

"El problema fundamental que estamos percibiendo las generaciones actuales y cuyas funestas consecuencias constituyen las más graves amenazas para la posteridad, es el que se relaciona con el agotamiento de los recursos naturales renovables y no renovables, no sólo en Manizales sino a nivel nacional y mundial…"

"La forma acelerada como se agrava la situación, exige un desarme de consideraciones nacionalistas, ideológicas y políticas para establecer un frente común capaz de resolver esta tenebrosa problemática. Estamos convencidos de que es la puerta grande de la Educación, el mejor medio para entrar de una manera inmediata y decidida a formar la verdadera conciencia que conduzca a la obtención de las mejores condiciones para alcanzar el éxito…"

"De mi libro de fábulas, desgloso para el caso la siguiente:

El Hombre y la naturaleza

Ha llegado el momento señores
De pensar que el planeta se acaba,
Pues si ayer medio mundo bastaba
Hoy sufrimos zozobras y horrores

Criminal es el hombre que en vida,
Desechando su innato talento,
So pretexto de hacerse al sustento
A Natura destruye y olvida

Si seguís ese afán destructor
Sin recíproca acción renovable,
Ya tendréis un planeta espantable
Y a tus hijos con hambre y pavor.

Hay que caminar y sembrar árboles"

CÓMO SEMBRAR UN ÁRBOL

1. Seleccionar el sitio
2. Limpieza y plateo
3. Ahoyado
4. Preparación del terreno
5. Plantación
6. Apisonado
7. Riego
8. Cercado
9. Protección y manejo.

Respondo en mi cuaderno las siguientes preguntas:

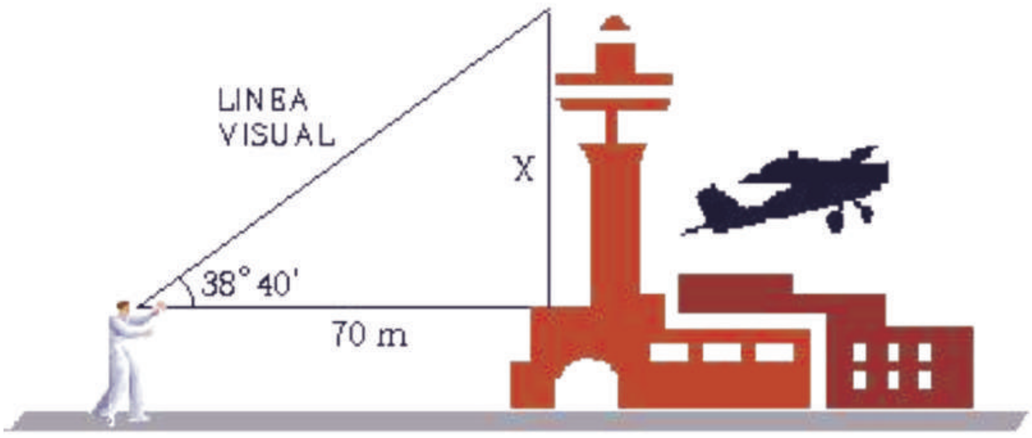
1. ¿Qué puedo hacer para ayudar a resolver el problema de los **recursos naturales?**
2. ¿En qué proyecto de **mejoramiento ambiental** me gustaría participar? Propongo uno. (Prácticas para evitar la erosión, construcción de composteaderos, etc.).
3. ¿Cuál es mi compromiso, frente a los proyectos ecológicos de mi colegio?
4. ¿Al definir el proyecto, qué aplicación tendrían los conceptos matemáticos vistos, en el desarrollo del mismo?

Regresemos de nuevo a la trigonometría. Analizo los conceptos de ángulos de elevación y depresión con sus respectivos ejemplos y los consigno en mi cuaderno.

ÁNGULO DE ELEVACIÓN

El ángulo de elevación es el ángulo formado por la horizontal y la línea visual del observador de un objeto situado encima de la horizontal.

EJEMPLO 5. La parte más alta de una torre de control de un aeropuerto se observa en un terreno horizontal desde un punto que dista 70 m. de su pie. El ángulo de elevación de dicho punto a la cúspide de la torre mide 38°40′. Encuentro la altura de la torre.



Se conoce un cateto y un ángulo agudo.

$\tan(38° \, 40') = \dfrac{x}{70}$

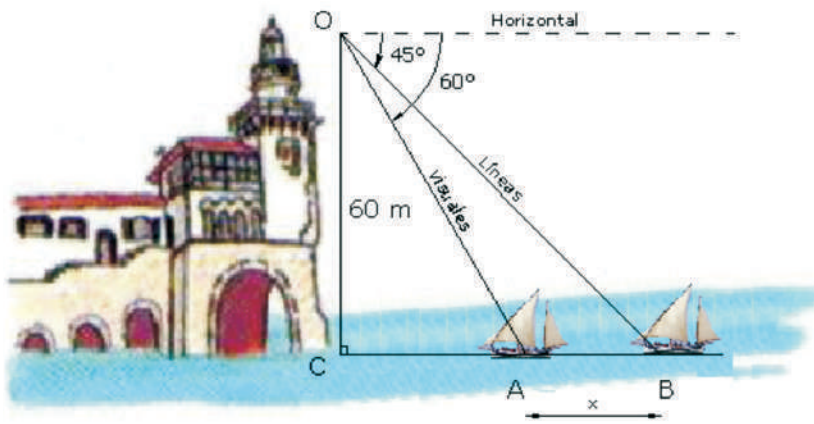
$x = 70 \tan 38°40'$
$x = 70 \times 0.8002$
$x = 56$ m

La torre de control tiene 56 m de altura (debo sumarle la altura del hombre) ≈ 57.8 m

ÁNGULO DE DEPRESIÓN

El ángulo de depresión es el ángulo formado por la horizontal y la línea visual del observador de un objeto situado por debajo de la horizontal.

EJEMPLO 6. Desde un punto de observación en un edificio frente al océano, los ángulos de depresión de dos botes alineados son 45° y 60°. Encuentro la distancia entre los botes si el punto de observación está a una altura de 60 metros.



Los ángulos de depresión están indicados en la figura, y "x" es la distancia entre los botes A y B.

Para calcular la distancia "x" entre los dos botes basta con restar CA de CB:

$$X = CB - CA$$

Cálculo de CB

En ΔOCB, el ángulo COB mide 45° (Complemento del ángulo de depresión de 45°). Aplico la tangente del ∠COB (45°).

$$\tan 45° = \frac{CB}{60\ m}$$

$$CB = 60 \tan 45° = 60 \times 1 = 60 \text{ m}$$

Cálculo de CA

En ΔOCA, el ángulo COA mide 30° (Complemento del ángulo de depresión de 60°). Aplico la tangente del ∠COA (30°).

$$\tan 30° = \frac{CA}{60\ m}$$

$$CA = 60 \tan 30° = 60 \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 20\sqrt{3} \text{ m}$$

$$x = CB - CA = 60 \text{ m} - 20\sqrt{3} \text{ m} = 20\,(3 - \sqrt{3}) \text{ m.}$$

$$x \approx 25 \text{ m}$$

APLICACIÓN

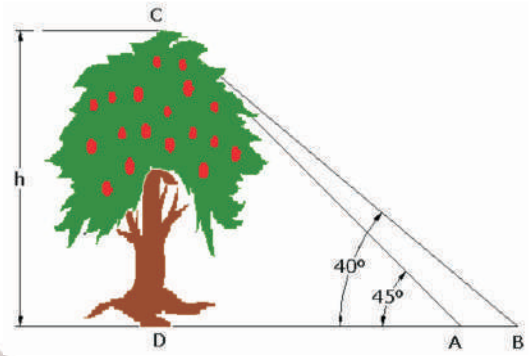
La responsabilidad ambiental es la capacidad para relacionarse de una manera racional y armónica con el ambiente. A partir de hoy, y como miembro participativo de la sociedad, me comprometo a poner en práctica las siguientes recomendaciones:

- Cerrar la llave mientras me enjabono, lavo la loza, o me cepillo los dientes.
- Controlar goteras y escapes, una pequeña gotera desperdicia 90 litros de agua al día.
- Colocar una botella de 2 litros en el fondo del tanque del inodoro para ahorrar dos litros de agua en cada desocupada, pues el vaciado lo produce la presión y no la cantidad.
- No utilizar desodorantes, insecticidas, pinturas, aceites, ambientadores que vengan en presentación de aerosol.
- Sembrar árboles cerca de los nacimientos de agua.
- Evitar las quemas, estas empobrecen el suelo, generan erosión primero y más tarde desierto.

La parte matemática también es muy importante y tiene mucha relación con problemas del medio ambiente.

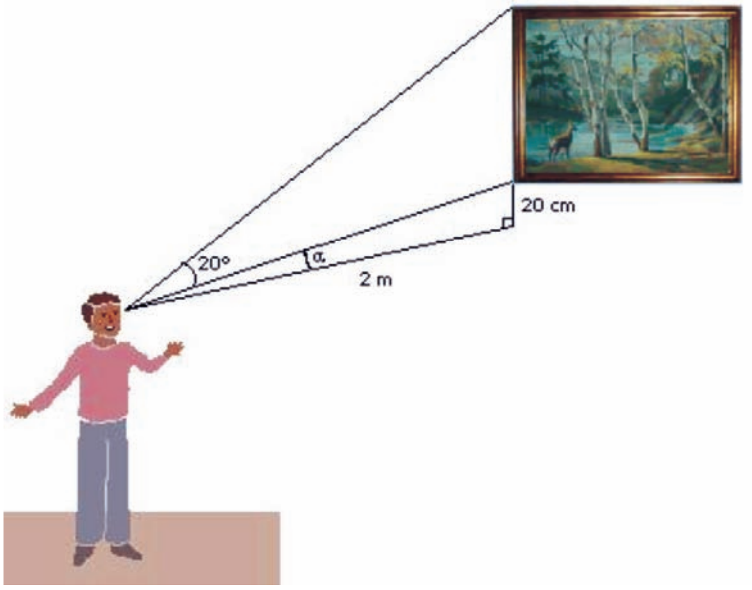
Resuelvo en mi cuaderno los siguientes problemas

1. Un árbol esta en la orilla de un lago. Un observador está situado en dirección opuesta en la otra orilla y los separa el agua. Dispone de instrumentos para medir ángulos y pequeñas distancias. Sobre el piso plano mide una distancia de 3 m y los ángulos que forman las visuales que van de los extremos del segmento a la parte alta del árbol son 45° y 40° respectivamente. ¿Cuál es la altura del árbol? ¿A qué distancia del árbol esta el punto B?



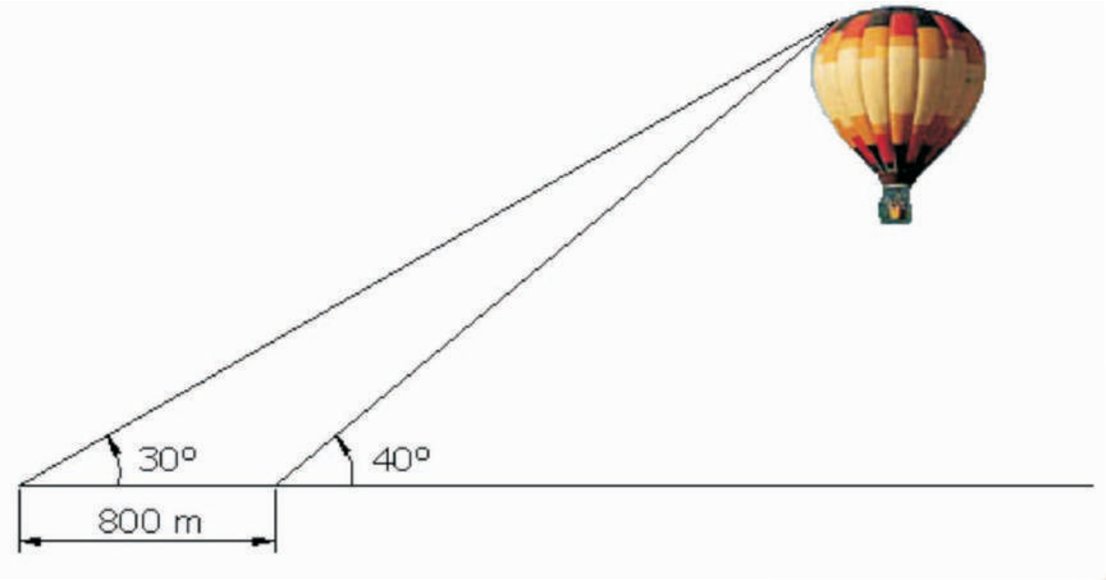
h = altura del árbol.
AB = distancia de 3 m.
$\angle$A y $\angle$B = ángulos de elevación.
DA = Ancho del lago.

2. Un cuadro localizado sobre una pared es tal que su borde inferior está a una distancia de 20 cm. sobre el nivel del ojo de un observador situado a 2 m de la pared. Si el ángulo que forman las visuales con los bordes inferior y superior del cuadro mide 20°. ¿Cuál es la altura del cuadro?



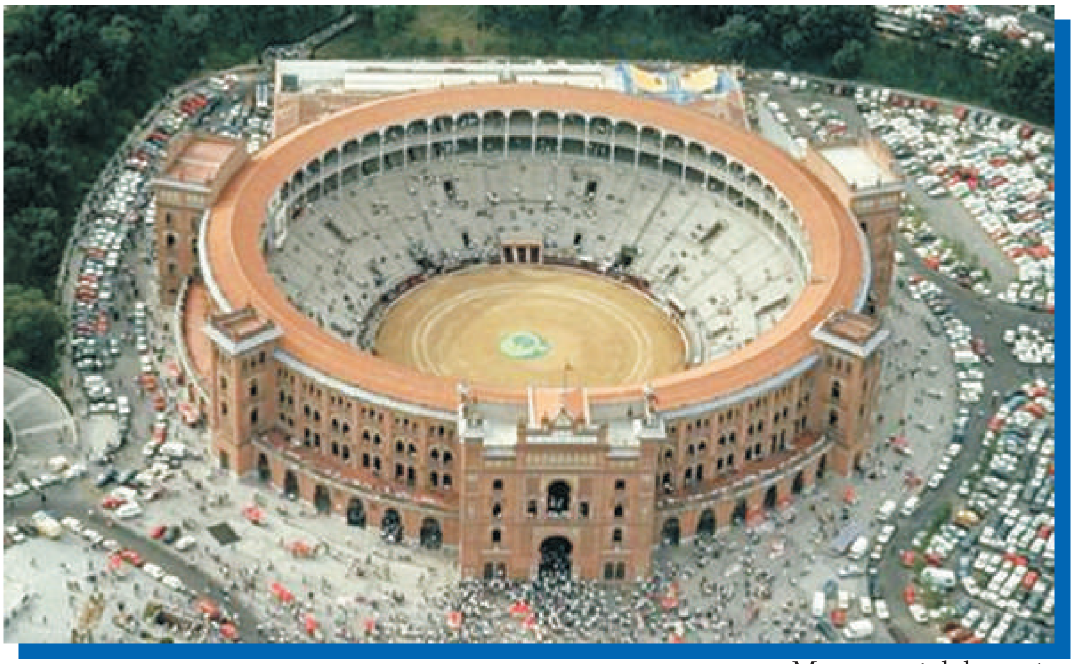
3. Se lanza un cohete espacial, a nivel del mar y sube en un ángulo constante de 68° 20′ recorriendo 15.000 m. Determine la altura que lleva el cohete respecto al nivel del mar en ese momento. Haga el dibujo.

4. Hallar a qué altura se encuentra el globo sobre el plano del suelo.



Guía 3

LA CIRCUNFERENCIA ES UNA FIGURA PERFECTA



Monumental de ventas

Indicadores de logros

- ✓ Define la circunferencia, sus elementos y los representa gráficamente.
- ✓ Deduce y grafica, como lugar geométrico, las circunferencias dadas por: $\{ (x, y): (x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2\}$
- ✓ Aplica los conceptos en situaciones de la vida real en los cuales se involucran circunferencias.
- ✓ Demuestra interés por actualizar su información de manera constante (GESTIÓN DE LA INFORMACIÓN).
- ✓ Identifica la información requerida para ampliar sus conocimientos de una situación o problema.
- ✓ Ubica las distintas fuentes de información disponibles.
- ✓ Recoge organizadamente la información.
- ✓ Analiza la información recolectada.
- ✓ Utiliza la información para tomar decisiones y emprender acciones.
- ✓ Reconoce la información resultante de la experiencia de otros.
- ✓ Organiza y archiva la información recolectada.

¿Usamos adecuadamente la información?

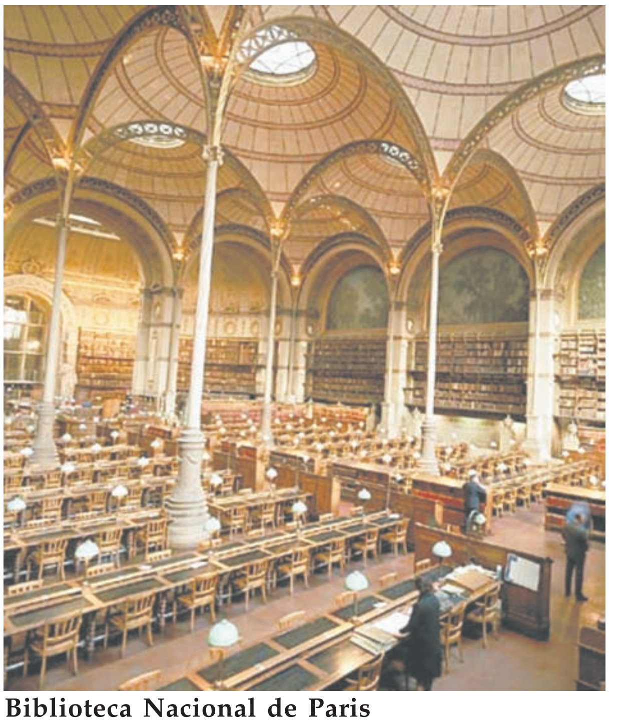
Con los compañeros de subgrupo, leemos y analizamos el siguiente contenido.

La competencia que se trabajará en esta guía es GESTIÓN DE LA INFORMACIÓN definida como la capacidad de recolectar información pertinente con el fin de procesarla, interpretarla y utilizarla para resolver situaciones.

En el mundo actual es cada vez mayor el flujo de información, de allí la necesidad de establecer nuevos canales de comunicación y aprendizaje que faciliten el acceso a la información disponible y permitan una mejor apropiación de la misma.

Con mis compañeros de subgrupo analizamos cuales son los canales de comunicación más utilizados por nosotros y los clasificamos en orden de importancia.

¿Estaremos usando adecuadamente la **información** que nos llega por medio de esos canales de comunicación?



Biblioteca Nacional de Paris

Se entiende la **información** como parte de la cultura, es decir, el conjunto de conocimientos, comportamientos, rituales y signos propios de los órdenes comunicativo, religioso, ideológico, artístico, ético y otros similares que caracterizan una sociedad.

Compartimos las respuestas con el profesor.

A

LA CIRCUNFERENCIA ES UNA FIGURA PERFECTA

Tomo del CRA un juego de PIÉNSALO y busco la información requerida para resolver el siguiente ejercicio. Lo presento al profesor.

a. Procedimiento para verificar que $L_1 || L_2$.

- Cabri - Géomètre II.
- Mostrar ejes (Icono 11)
- Definir cuadrícula (Icono 11 y señalo los ejes)
- Punto (Icono 2) y señalo los puntos (0, 5) y (- 3, - 4) que pertenecen a la recta L_1.
- Recta (Icono 3) y señalo los puntos (0, 5) y (- 3, - 4).
- Ecuación y coordenadas (Icono 9) y señalo la recta. Aparece la ecuación $y = 3x + 5$ correspondiente a L_1.
- Punto (Icono 2) y señalo los puntos (0, 3) y (- 1, 0) que satisfacen la ecuación de la recta L_2.
- Ecuación y coordenadas (Icono 9) y señalo la recta. Aparece la ecuación $y = 3x + 3$ correspondiente a L_2.
- Pendiente (Icono 9). Señalo la recta L_1 y aparece **3.0** señalo la recta L_2 y aparece **3.0.**

b. Utilice el mismo procedimiento para verificar que $L_3 || L_4$.

RECTAS PERPENDICULARES

Analizo el siguiente teorema y su demostración, teniendo en cuenta que toda equivalencia debe ser demostrada en ambos sentidos; para comprobar que $A \Leftrightarrow B$ es necesario probar que $A \Rightarrow B$ y también que $B \Rightarrow A$.

Teorema

Dos rectas no verticales L_1 y L_2 son perpendiculares si y sólo si el producto de sus pendientes es igual a menos uno.

$$\mathbf{L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow m_1 m_2 = -1}$$

Demostración

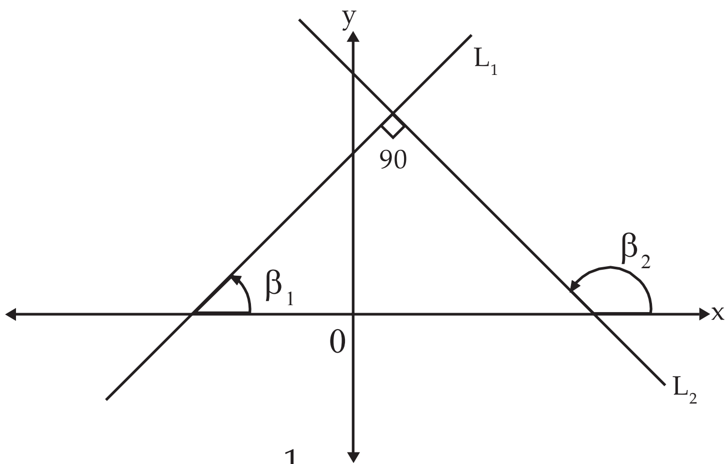
a) $\mathbf{L_1 \perp L_2 \Rightarrow m_1 m_2 = -1}$

Si las rectas L_1 y L_2 son perpendiculares como lo muestra la figura, entonces $\beta_2 = \beta_1 + 90°$ (la medida de un ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de las medidas de los ángulos interiores no adyacentes).

Si $\beta_2 = \beta_1 + 90°$, entonces
$\tan\beta_2 = \tan(\beta_1 + 90°)$

$\tan\beta_2 = -\cot\beta_1$

$\tan\beta_2 = -\dfrac{1}{\tan\beta_1}$



Como $\tan\beta_2 = m_2$ y $\tan\beta_1 = m_1$, obtenemos: $m_2 = -\dfrac{1}{m_1}$ o $m_1 m_2 = -1$.
Luego,

$$\boxed{\text{Si } L_1 \perp L_2, \text{ entonces } m_1 m_2 = -1}$$

b) $m_1 m_2 = -1 \Rightarrow L_1 \perp L_2$

Si $m_1 m_2 = -1$, entonces $\tan\beta_1 \tan\beta_2 = -1$, tal que $\tan\beta_1 > 0$ y $\tan\beta_2 < 0$;
si $\tan\beta_1 \tan\beta_2 = -1$, entonces:

$$\tan\beta_2 = -\frac{1}{\tan\beta_1} = -\cot\beta_1$$

Como $-\cot\beta_1 = \tan(\beta_1 + 90°)$, entonces $\tan\beta_2 = \tan(\beta_1 + 90°)$

Si $\tan\beta_2 = \tan(\beta_1 + 90°)$, entonces $\beta_2 = \beta_1 + 90°$ y β_2 es el ángulo exterior a un triángulo (ver figura) que tiene como ángulos interiores no adyacentes a ángulos de medida β_1 y $90°$.

Por lo tanto, $\boxed{\text{Si } m_1 m_2 = -1, \text{ entonces } L_1 \perp L_2}$

Analizo con mis compañeros los ejemplos 3 y 4 y resolvemos los ejercicios propuestos.

EJEMPLO 3. Una recta L_1 tiene una inclinación $\beta_1 = 120°$. Hallo la pendiente de la recta L_2 perpendicular a L_1 y su inclinación.

Si m_1 = pendiente de L_1, entonces $m_1 = \tan\ \beta_1 = \tan 120° = -\sqrt{3}$

Cálculo de m_2

Si $m_1 m_2 = -1$, entonces $m_2 = -\dfrac{1}{m_1} = -\dfrac{1}{-\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$m_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ es la pendiente de la recta L_2.

Cálculo de β_2

Si $m_2 = \tan\beta_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, entonces $\beta_2 = 30°$; $\left(\tan^{-1}\dfrac{\sqrt{3}}{3} = 30°\right)$.

EJERCICIO

Puedo verificar los resultados, haciendo una gráfica. Utilizo el Programa CABRI en el computador para medir $\beta_1 = 120°$ y verificar que $\beta_2 = 30°$. También puedo utilizar los valores de $m_1 = -\sqrt{3}$ para trazar L_1 y verificar que $m_2 = \sqrt{3}/3$. Sigo las siguientes instrucciones.

a) Procedimiento 1

- Cabri - Géometre II
- Segmento (Icono 3) y trazo un segmento horizontal y otro que forme un ángulo aproximado a 120°.
- Ángulo (Icono 9) y señalo tres puntos, uno en la línea horizontal, otro en el vértice y el tercero en la otra línea. Luego, moviendo la recta no horizontal ajusto el ángulo a 120^0 ($\beta_1 = 120°$).
- Recta perpendicular (Icono 5). Señalo un punto exterior y la recta.

- ✳ Segmento. Trazo una línea horizontal que pase por la intersección con la perpendicular.
- ✳ Ángulo. Mido el nuevo ángulo y observo que aparece 30°que corresponde al ángulo β_2, que era lo que quería verificar.
  Además puedo comprobar también las pendientes de las dos rectas perpendiculares:
- ✳ Pendiente (Icono 9). Señalo la recta que forma el ángulo de 120° con la horizontal y aparece - **1.73** que corresponde a $\mathbf{m_1}$. Señalo la recta perpendicular y aparece **0. 58** que corresponde a $\mathbf{m_2}$.

b) Procedimiento 2:

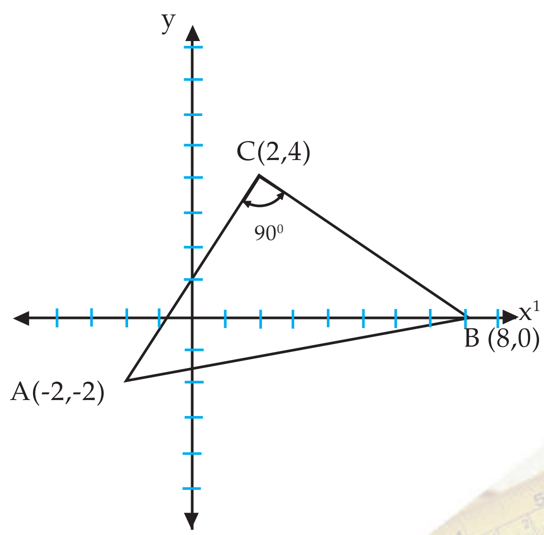
- ✳ Cabri - Géometre II
- ✳ Segmento (Icono 3) y trazo un segmento inclinado.
- ✳ Pendiente (Icono 9), señalo el segmento y ajusto la pendiente en - 1.73 ($-\sqrt{3}$).
- ✳ Recta Perpendicular (Icono 5), ubico un punto y señalo la recta.
- ✳ Pendiente y señalo la recta. Aparece 0.58 que equivale a $\frac{\sqrt{3}}{3}$.
  Además puedo verificar los ángulos:
- ✳ Segmento. Trazo un segmento horizontal que pase por la intersección con la perpendicular y otro por el pie de la primera línea.
- ✳ Ángulo. Señalo tres puntos en el ángulo β_1 (aparece 120°) y otros 3 puntos en el ángulo β_2 (aparece 30°). **Estos 2 procesos verifican el ejemplo 3.**

EJEMPLO 4. Verifico que los puntos A (- 2, - 2), B (8, 0) y C (2, 4) son los vértices de un triángulo isósceles.

a. Solución Gráfica

Ubico los puntos A, B y C en el plano cartesiano y mido los lados y ángulos utilizando **regla y transportador.**

Las medidas de AC y BC son iguales (7.2 unidades). El ángulo C mide 90° y los ángulos A y B miden 45° c/u.



b. Solución analítica

Sean m_1 = pendiente de la recta AB.
m_2 = pendiente de la recta AC.
m_3 = pendiente de la recta BC.

$$m_1 = \frac{0-(-2)}{8-(-2)} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} \qquad m_2 = \frac{4-(-2)}{2-(-2)} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \qquad m_3 = \frac{4-0}{2-8} = \frac{4}{-6} = -\frac{2}{3}$$

Como $m_2 m_3 = \frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = -1$, entonces $AC \perp BC$ y $\angle C = 90°$.

Por lo tanto ΔABC es rectángulo en C.

Verifico que el ΔABC es isósceles, esto es, AC = BC.

$$\overline{AC} = \sqrt{(4+2)^2 + (2+2)^2} = \sqrt{52}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(4-0)^2 + (2-8)^2} = \sqrt{52}$$

EJERCICIOS. Con mis compañeros de subgrupo, utilizando los conceptos vistos o la **tecnología** apropiada, resuelvo en mi cuaderno los siguientes ejercicios.

1. Analice si las rectas que representan las siguientes ecuaciones son paralelas o perpendiculares.

   a) L_1: 3y - x = 0 ; L_2: y + 3x - 1 = 0
   b) L_1: y = - 5 + 7x ; L_2: 7y + x = 7
   c) L_1: y - 4x = 2 ; L_2: y = 3 + 4x

2. Demuestre, por dos métodos diferentes, que los puntos (4, 4), (2,-3), (9, 4) y (- 3, - 3) son vértices de un paralelogramo.

3. Demuestre, por dos métodos diferentes, que los puntos (3, 4), (-2, -1) y (4,1) son vértices de un triángulo rectángulo.

   Pedimos la asesoría al profesor para verificar los resultados obtenidos.

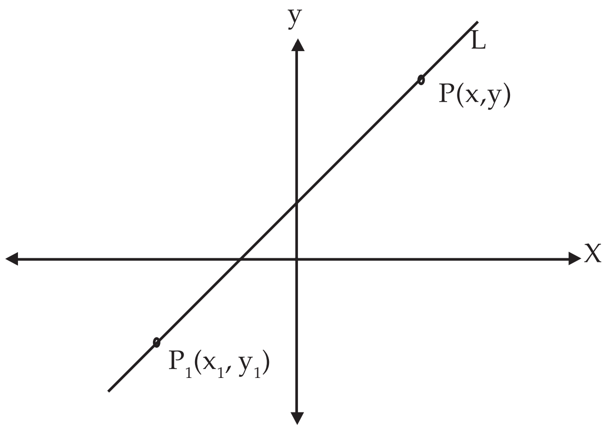
ECUACIONES DE LA RECTA

Continuando con el estudio de la recta, analizo las diferentes relaciones matemáticas que la representan y sus ejemplos correspondientes.

ECUACIÓN DE LA RECTA PUNTO - PENDIENTE

Considero la recta L, con pendiente m, que pasa por el punto P_1 (x_1, y_1). Sea P (x, y) un punto cualquiera del plano. El punto P está sobre la recta si cumple que:

DE QUÉ SIRVE SABER QUÉ ES UNA LÍNEA RECTA SI NO SE SABE LO QUE ES **RECTITUD**



$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1},\ con\ x \neq x_1$$

equivalente a:

$$\boxed{y - y_1 = m\,(x - x_1)}$$

recibe el nombre de ECUACIÓN DE LA RECTA PUNTO - PENDIENTE
Si la recta L es paralela al eje Y y pasa por el punto P_1 (x_1,y_1), su ecuación es $\boxed{x = x_1}$. Todos los puntos P (x, y) están sobre la recta si sus abscisas son iguales para todo valor de **y**.

EJEMPLO 5. Hallo la ecuación de la recta que pasa por el punto (- 3, 4) y tiene pendiente - 2.

$$y - y_1 = m\,(x - x_1) \left\{ \begin{array}{l} y_1 = 4 \\ x_1 = -3 \\ m = -2 \end{array} \right.$$

$y - 4 = -2\,[\,x - (-3)]$
$y - 4 = -2\,(x + 3)$
$y - 4 = -2x - 6$

Luego $y + 2x + 2 = 0$ es la ecuación de la recta.

ECUACIÓN DE LA RECTA QUE PASA POR DOS PUNTOS

Considero dos puntos conocidos P_1 (x_1, y_1) y P_2 (x_2, y_2), $P_1 \neq P_2$. La recta L que determina los puntos tiene como pendiente:

$m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, $para\ x_1 \neq x_2$

Como la recta L tiene una pendiente **m** y, además pasa por el punto P_1 (x_1, y_1), entonces se cumple la forma PUNTO - PENDIENTE (caso anterior):

$y - y_1 = m\,(x - x_1)$

$$\boxed{y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)}$$ con $x_1 \neq x_2$.

Esta es la ecuación de la recta L que pasa por dos puntos diferentes del plano.

EJEMPLO 6. Hallo la ecuación de la recta que pasa por los puntos (- 5, 4) y (2, - 3).

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \quad \begin{cases} x_1 = -5\ ;\ \ y_1 = 4 \\ x_2 = 2\ ;\ y_2 = -3 \end{cases}$$

Reemplazo los valores de $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$, $\mathbf{y_1}$ y $\mathbf{y_2}$ en la ecuación:

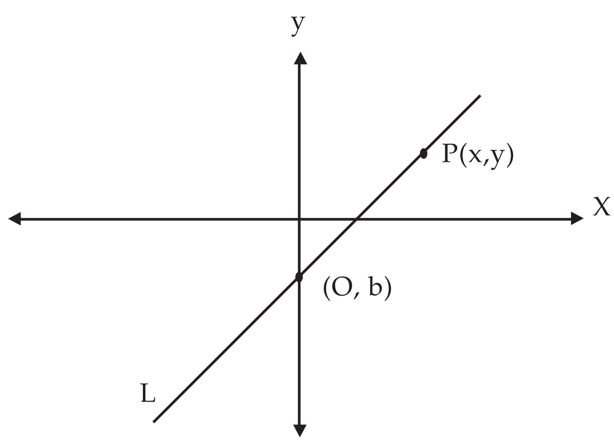
$$y - 4 = \frac{-3-4}{2-(-5)}(x-(-5))$$

$$y - 4 = \frac{-7}{7}(x+5)$$

$y - 4 = - x - 5$

$y + x + 1 = 0$ es la ecuación de la recta pedida.

FORMA PENDIENTE - INTERCEPTO CON EL EJE Y



Considero una recta L con una pendiente **m** e intercepto **b** con el eje Y.

De acuerdo a la figura, el punto (0, b) está en la recta. La ecuación de la recta L que pasa por P_1 (0 ,b) y de pendiente **m** es:

y - b = m (x - 0)

Por lo tanto,

$$\boxed{y = mx + b}$$

Es la ecuación de la recta en la forma PENDIENTE - INTERCEPTO.

EJEMPLO 7. Hallo la ecuación de la recta con pendiente 1/2 y que intersecta al eje Y en el punto (0, - 3).

$$y = mx + b\begin{cases} m = 1/2 \\ b = -3 \end{cases}$$

Reemplazo **m** y **b** por los valores correspondientes:

$$y = \frac{1}{2}x - 3$$

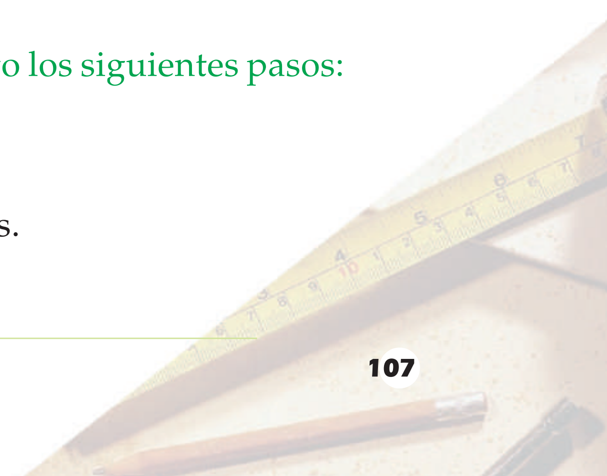
2y - x + 6 = 0 es la ecuación de la recta pedida.

Utilizo la tecnología para comprobar la ecuación:

Con mis compañeros de subgrupo, visito la sala virtual.

Utilizo el programa CABRI - GÉOMÈTRE II y sigo los siguientes pasos:

- Cabri - Géomètre II
- Mostrar ejes (Icono 11)
- Definir cuadrícula (Icono 11) y señalo los ejes.



❊ Punto (Icono 2) y señalo el punto (0, - 3).
❊ Ecuación y coordenadas (Icono 9) y señalo el punto (0, - 3).
❊ Punto y señalo el punto (2, - 2) tal que la pendiente de la línea que pasa por el punto (0, - 3) y (2, - 2) sea 1/2 (una unidad vertical por dos horizontales).
❊ Recta (Icono 3), señalo los puntos (0, - 3) y (2, - 2) y verifico que la recta pasa por el punto (6, 0).
❊ Ecuación y coordenadas y señalo la recta. Aparece la ecuación y = x/2 -3, que se transforma en **2y - x + 6 = 0** ó sea lo que quería demostrar. Además puedo verificar la pendiente.
❊ Pendiente (Icono 9), señalo la recta y aparece **0. 50**.

ECUACIÓN DE LA RECTA DADOS LOS INTERCEPTOS

Considero los interceptos a ≠ 0 de la recta L con el eje X y b ≠ 0 con el eje Y. La recta pedida L pasa por los puntos (a, 0) y (0, b).

Aplico la forma de la recta que pasa por dos puntos:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \begin{cases} x_1 = a \quad , \quad y_1 = 0 \\ x_2 = 0 \quad , \quad y_2 = b \end{cases}$$

$$y - 0 = \frac{b - 0}{0 - a}(x - a)$$

Simplifico y aplico la propiedad distributiva

$$y = \frac{bx - ba}{-a}$$

- ay = bx - ba

Divido por **ab** y organizo la **ecuación de la recta** cuyos interceptos con los ejes X y Y son **a** y **b** respectivamente.

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1}$$

EJEMPLO 8. Hallo la ecuación de la recta que tiene por interceptos, 3 con el eje X y - 2 con el eje Y.

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \begin{cases} a = 3 \\ b = -2 \end{cases}$$

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{-2} = 1$$

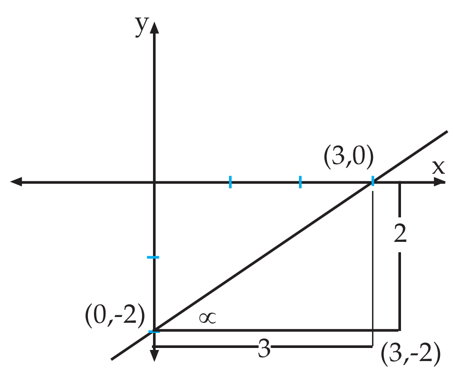
$$\frac{-2x + 3y}{-6} = 1$$

Luego, 3y - 2x + 6 = 0 es la ecuación de la recta pedida.

EJERCICIO. **Aplico la tecnología** para verificar el resultado:

a. **Utilizando las herramientas en forma adecuada.**

- Con la ayuda de **lápiz, sacapuntas, regla y escuadra**, trazo un plano cartesiano (el lápiz debe tener la punta adecuada).
- Localizo los interceptos señalando los puntos (0, - 2) y (3, 0).
- Trazo la recta que pasa por los puntos interceptos.
- Transformo la ecuación 3y - 2x + 6 = 0 en la forma:



Si $\tan \alpha = \frac{2}{3}$, entonces $\alpha = 33.7°$.

Con el **transportador** verifico el valor de α.

PENDIENTE - INTERCEPTO

$$y = \frac{2}{3}x - 2 \begin{cases} b = -2 \\ m = 2/3 \end{cases}$$

En la gráfica puedo observar que $\boxed{b = -2}$.

La pendiente **m** la puedo obtener de la gráfica:

$$m = \tan \propto = \frac{2}{3}$$

b. **Incorporando herramientas informáticas.** Visito la sala Virtual y utilizo el programa Cabri - Géomètre II:

✻Mostrar ejes (Icono 11)
✻Definir cuadrícula (Icono 11). Señalo los ejes.
✻Punto (Icono 2). Localizo los puntos (3, 0) y (0, - 2).
✻Recta (Icono 3). Señalo los puntos (3, 0) y (0, - 2).
✻Ecuación y coordenadas (Icono 9). Señalo la recta.
Aparece la ecuación **y = 0.66x - 2** en la que la pendiente m = 0.66 es equivalente a m = 2/3.
Además, en la gráfica se puede apreciar que la recta pasa por (0, - 2).
Por lo tanto $\boxed{b = -2}$.

ECUACIÓN GENERAL DE LA RECTA

Si A, B y C son números reales con A ó B diferentes de cero, entonces la ecuación.

$$\mathbf{Ax + By + C = 0}$$

Representa una línea recta, que se denomina ECUACIÓN GENERAL DE LA RECTA

Si $B \neq 0$, entonces $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$. Esta ecuación es de la forma **y = mx + b**, donde $m = -\frac{A}{B}$ y $b = -\frac{C}{B}$.

Si B = 0 y , A $\neq$ 0, entonces la ecuación Ax + By + C = 0 se transforma en

$x = -\frac{C}{A}$ que corresponde a la ecuación de una recta paralela al eje Y.

EJEMPLO 9. Hallo la ecuación general de la recta que pasa por el punto (2, 0) y por el punto de intersección de la recta - x - y - 1 = 0 con el eje Y.

Para x = 0 (EJE Y): -0 - y - 1 = 0; y = - 1.

El otro punto por donde pasa la recta es (0, - 1).

Como se conocen los interceptos con los ejes, aplico la ecuación:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1\begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \end{cases}$$

$$\frac{x}{2}-\frac{y}{1}=1$$

x - 2y = 2

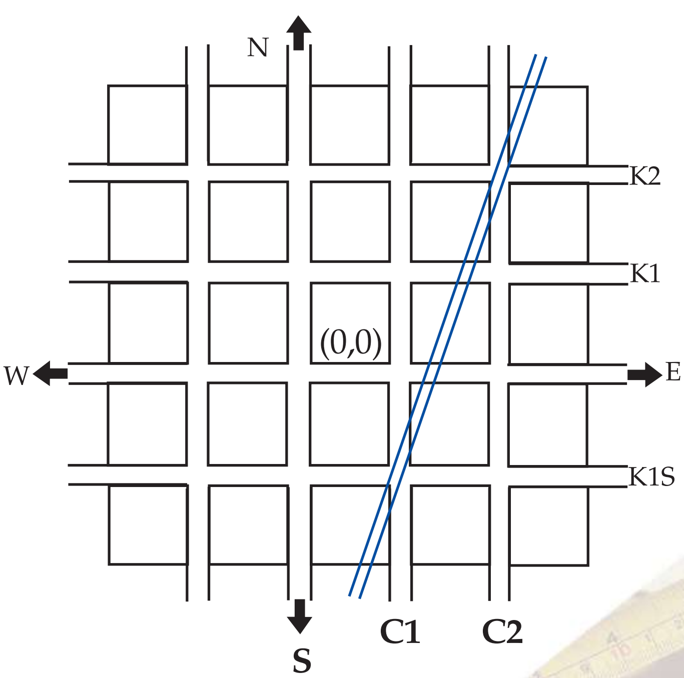
Por lo tanto **x - 2y - 2 = 0** es la **Ecuación General** de la recta pedida.

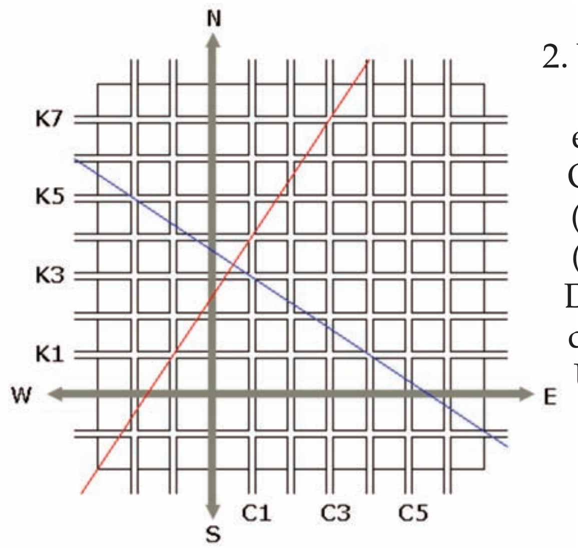
APLIQUEMOS LO APRENDIDO

EL MANEJO TECNOLÓGICO busca formar personas versátiles, con gran capacidad para capturar, aplicar y utilizar la información disponible, amigable con la tecnología disponible y aplicable en cualquier contexto y con una alta motivación hacia el uso de las herramientas tecnológicas.

Resuelvo los siguientes ejercicios de aplicación, utilizando alguna tecnología para demostrarlos (instrumentos de medición, calculadora, computador, etc.).

1. Una diagonal en una ciudad pasa por el cruce de la calle 2 con carrera 2 y por el cruce de la calle 1 y la carrera 1 sur. Halle la ecuación de la diagonal. Haga la demostración utilizando el programa Cabri - Géometre II.





2. Un cable aéreo pasa por encima del cruce de la calle 2 oeste con la carrera 5 y por encima del cruce de la calle 4 con carrera 1. Otro cable pasa por encima de los cruces (- 1, 1) (calle 1 oeste, carrera 1) y(3, 7) (calle 3, carrera 7).
   Demuestre que los dos cables son perpendiculares.
   Utilice dos procedimientos.

3. Encuentre la ecuación general de la recta que satisface las condiciones dadas:

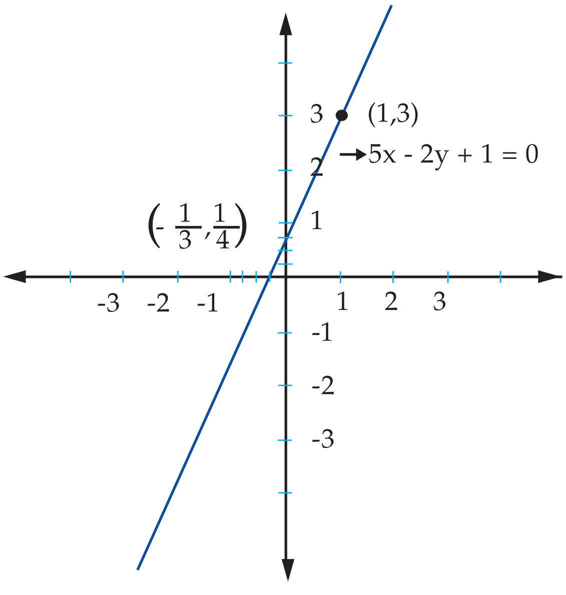
   a. Pasa por (- 1, - 3) y es paralela a la recta que pasa por (3, 2) y (- 5, 7).
   b. Pasa por (- 1,2) y es paralela a la recta y - x - 1 = 0.

4. Halle la ecuación de la recta de pendiente - 4 y que pasa por el punto de intersección de las rectas:

   $3x + 2y - 3 = 0$ y $2x - y + 1 = 0$.

5. Halle la pendiente y los interceptos de la recta que pasa por (- 1/3, 1/4) y es paralela con la recta:

   $$5x - 2y + 1 = 0.$$

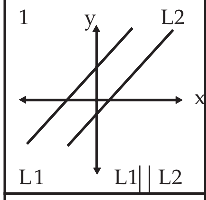
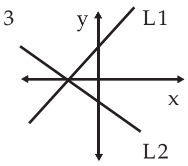
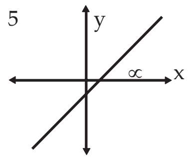
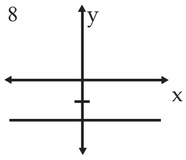
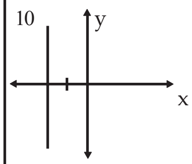


Discutimos las respuestas con el profesor, especialmente las que tienen que ver con el uso de la tecnología.

¿DESEA SABER MÁS?

EL MANEJO TECNOLÓGICO se evidencia en la escuela desde el desarrollo de los materiales de autoinstrucción y la utilización del Centro de Recursos de Aprendizaje CRA:

Tomo del CRA un juego de PIÉNSALO y resuelvo el siguiente ejercicio:

1  y L2 x L1 L1 ∥ L2	2 $y = mx + b$	3  y L1 x L2 L1 ⊥ L2	4 $y-y_1 = m(x - x_1)$ con $x \neq x_1$	5  y ∝ x tan ∝ =	6 $y-y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ com $x_1 \neq x_2$
7 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$	8  y x	9 $Ax + By + c = 0$	10  y x	11 RECTAS PERPENDI-CULARES	12 RECTAS PARALELAS

A $m_1 m_2 = -1$	B FORMA PENDIENTE-INTERCEPTO CON EL EJE Y	C ECUACIÓN DE LA RECTA DADOS LOS INTERCEPTOS	D $X = -2$	E ECUACIÓN DE LA RECTA QUE PASA POR DOS PUNTOS	F $y-2x-1=0$ $2y+x+3=0$
G m	H $y = -2$	I $m_1 = m_2$	J FORMA PUNTO PENDIENTE	K $-5x+y+10=0$ $2y-10x-4=0$	L ECUACIÓN GENERAL DE LA RECTA

EL MANEJO TECNOLÓGICO también se evidencia desde la implementación del Proyecto Escuela Virtual.

Visito la Sala Virtual, utilizo el CD PÁGINAS WEB DE MATEMÁTICAS y sigo las siguientes instrucciones:

- ⁕Saltar introducción
- ⁕Descartes
- ⁕Unidades Didácticas
- ⁕Segundo ciclo de enseñanza obligatoria.
- ⁕Ecuaciones de la Recta.

Analizo la información y los ejemplos sobre ecuaciones Paramétricas. Hago un resumen y lo presento al profesor.

EL MANEJO TECNOLÓGICO SE EVIDENCIA EN LA ESCUELA DESDE LA IMPLEMENTACIÓN DE LOS PROYECTOS PEDAGÓGICOS PRODUCTIVOS, A TRAVÉS DE LA ADOPCIÓN Y ADAPTACIÓN DE LAS TECNOLOGÍAS DE PRODUCCIÓN DISPONIBLES.

ESTUDIO Y ADAPTACIÓN DE LA GUÍA

1. Visite la Sala Virtual, utilice el CD "PÁGINAS WEB DE MATEMÁTICAS" y busque en DESCARTES el tema "La Circunferencia". Luego estudie los subtemas:

   - ECUACIÓN GENERAL
   - PROGRESANDO EN EL CONOCIMIENTO DE LA CIRCUNFERENCIA
   - CIRCUNFERENCIA QUE PASA POR TRES PUNTOS

   Resuelva al menos dos ejercicios del último tema, recoja organizadamente las operaciones realizadas y preséntelas al profesor.

La Gestión de la Información se evidencia en la escuela utilizando la biblioteca o los CRA. A través de los textos de consulta se está llevando al estudiante a que resignifique el conocimiento obtenido desde la guía.

2. Demuestre los teoremas vistos en esta guía. Si tiene dificultades consulte sus demostraciones en libros de la biblioteca o el CRA.

3. Consulte otros teoremas y sus demostraciones sobre circunferencias, cuerdas, tangentes y secantes.

LA GESTIÓN DE LA INFORMACIÓN SE OCUPA DEL ESTUDIO DE LOS **SISTEMAS** PARA LA ADQUISICIÓN, CONSERVACIÓN, TRANSMISIÓN, ORDENAMIENTO, APROVECHAMIENTO Y EVALUACIÓN DE LA INFORMACIÓN.

EUCLIDES, geómetra griego que actuó alrededor del año 300 A.D. Su obra más destacada, los **Elementos** está considerada entre las obras cumbres de la literatura universal. Su valor reside en haber **sistematizado** los conocimientos matemáticos de su época y en haber construido **un método científico** que sirvió de modelo a la matemática por más de 2000 años.

ESTUDIO Y ADAPTACIÓN DE LA GUÍA

Guía 4

LO MARAVILLOSO DE LAS PARÁBOLAS

GATEWAY ARCH (MISSOURI)

Indicadores de logros

- ✓ Define la parábola, sus elementos y los representa gráficamente.
- ✓ Deduce y grafica, como lugares geométricos, las parábolas dadas por: $\{(x, y): x^2 = 4ay\}$; $\{(x, y): y^2 = 4ax\}$
- ✓ Aplica los conceptos que involucran parábolas, a situaciones de la vida real.
- ✓ Toma decisiones basadas en principios y valores sociales y particulares (COMPETENCIA AXIOLÓGICA).
- ✓ Cuida los bienes ajenos, públicos y del entorno.
- ✓ Actúa y se desempeña con autodisciplina, sin necesidad de supervisión, en el marco de la autonomía otorgada.
- ✓ Analiza y reflexiona sobre su comportamiento y el de los otros.
- ✓ Acepta a los otros sin importar sus condiciones socioculturales.
- ✓ Respeta los acuerdos consensuados.

Principios y valores sociales

Con mis compañeros de subgrupo, leemos y analizamos el siguiente párrafo.

Ya tenemos conocimiento acerca de la competencia AXIOLÓGICA, la cual fue trabajada en la Unidad 2, Guía 2.

Un indicador de esta competencia es tomar decisiones basadas en principios y valores sociales y particulares.

Los principios y valores sociales nacen en la familia; los padres inculcan en sus hijos las primeras normas morales de convivencia, que después se complementan en la escuela. El cumplimiento o incumplimiento de esas normas no tienen consecuencias físicas, ni económicas, ni legales. Es el individuo mismo, su propia apreciación y valoración como ser humano, quien se ve afectado o beneficiado, del mal o buen proceder moral.

Las estrategias de Escuela Nueva, me facilitan el desarrollo de principios morales y éticos. Respondo, con mis compañeros de subgrupo las siguientes preguntas.

- ¿Cuido mis pertenencias, las de mis compañeros y las de mi colegio?
- ¿Me comporto con autodisciplina, sin necesidad de supervisión?
- ¿Evito el fraude para obtener buenas notas en trabajos y evaluaciones?
- ¿Soy sincero en el buen trato con mis compañeros y profesores?
- ¿A mis padres, siempre les hablo con la verdad y respeto?

Analizamos las respuestas y nos fijamos unas metas de mejoramiento que compartimos con los demás subgrupos.

"El verdadero bien se halla únicamente en la tranquilidad de la conciencia"

Séneca.

LO MARAVILLOSO DE LAS PARÁBOLAS

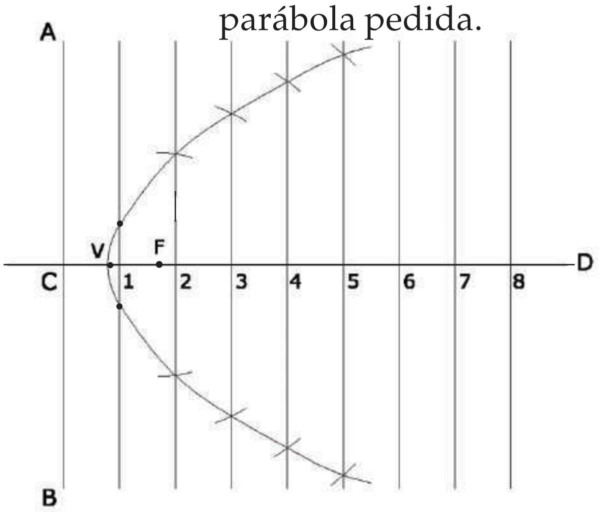
Si alguna vez he escrito sobre las guías, a sabiendas de que no lo debo hacer, es ésta la oportunidad de reflexionar y tomar conciencia que debo cuidar los bienes del colegio, que en el próximo año serán usados por otros estudiantes.

La parábola es una de las formas más utilizadas por el hombre para diseñar estructuras de puentes, túneles, arcos, portales; muchos ingenieros y arquitectos han hecho maravillosas obras inspirados en la **Parábola**.

Para afianzar el concepto de **Parábola**, tomo lápiz, regla y compás y realizo el siguiente ejercicio.

Trazar la parábola de directriz AB y foco F.

Sobre el eje horizontal CD, perpendicular a la directriz AB, tomo una serie de puntos por los cuales trazo líneas paralelas a la directriz. Hago centro en F y con radios C1, C2, C3,... respectivamente corto las paralelas a lado y lado del eje principal. Uno los puntos a mano alzada obteniendo la parábola pedida.



Presento la gráfica al profesor para afianzar conceptos.

Visite la Sala Virtual, utilice el CD “PÁGINAS WEB DE MATEMÁTICAS” y siga el siguiente derrotero:

- Saltar introducción
- Descartes
- Segundo ciclo de Enseñanza Secundaria Obligatoria.
- Las cónicas como lugares geométricos. Trazado.
- ÍNDICE
- Parábola

Mueva el punto ***P*** y verifique que la distancia del ***foco*** a la ***Parábola*** sea igual a las distancias de la ***Parábola*** a la ***directriz.***

¿Qué puedo concluir comparando los dos ejercicios realizados?

Comparto la conclusión con mis compañeros y el profesor.

¿Qué otro significado tiene la palabra PARÁBOLA?

Exploremos algunos ejemplos:

La parábola de la oveja pérdida

“No desprecien a ninguno de estos pequeños. Pues les digo que en el cielo los ángeles de ellos están siempre en presencia de mi Padre Celestial. ¿Qué les parece? Si un hombre tiene 100 ovejas y se le extravía una de ellas, ¿Acaso no dejará las otras noventa y nueve en el monte, para ir a buscar lo oveja extraviada? Y si logra encontrarla, de seguro se alegrará más por esa oveja que por las noventa y nueve que no se extraviaron. Así también, el Padre de ustedes que está en el cielo no quiere que se pierda ninguno de esos pequeños”. *SAN MATEO 18.*

La parábola de la semilla de mostaza.

También dijo Jesús, “¿A qué se parece el reino de Dios, o con qué podremos compararlo? Es como una semilla de mostaza que se siembra en la tierra. Es la más pequeña de todas las semillas del mundo, pero una vez sembrada, crece y se hace mayor que todas las plantas del huerto, con ramas tan grandes que hasta las aves pueden anidar bajo su sombra”. *SAN MARCOS 4, 5.*

De esta manera les enseñaba Jesús el mensaje, por medio de muchas parábolas como las anteriores y hasta donde podían entender. Pero no les decía nada sin parábolas, aunque a sus discípulos se los explicaba todo aparte.

Desde el punto de vista AXIOLÓGICO, ¿qué enseñanza nos dejan estas parábolas?

LA PARÁBOLA

Organicémonos por subgrupos para realizar el siguiente trabajo. Durante su desarrollo y al final del mismo, debemos evidenciar que fuimos capaces de trabajar con responsabilidad y autodisciplina.

Analizo con mis compañeros las siguientes definiciones, sus gráficas y sus relaciones matemáticas.

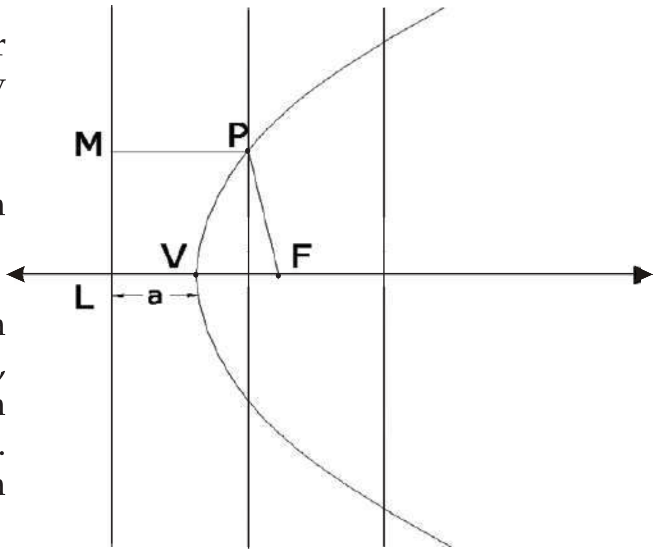
PARÁBOLA

Una parábola es el conjunto de puntos del plano que están a igual distancia de un punto fijo llamado **foco** y de una recta fija llamada **directriz**.

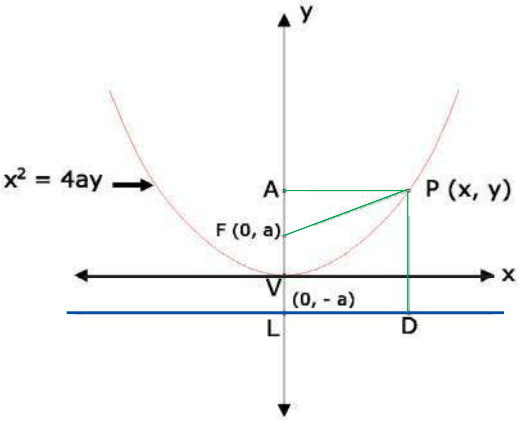
De la definición, es fácil construir puntos de una parábola con regla y compás.

Sean $\overleftrightarrow{LM}$ la directriz y F el foco de una parábola.

Si trazamos por F una perpendicular a $\overleftrightarrow{LM}$, el punto medio de LF es, evidentemente, un punto de la parábola, de acuerdo con la definición. A la recta $\overleftrightarrow{LF}$ se le llama **eje** de la parábola y al punto V, **vértice.**

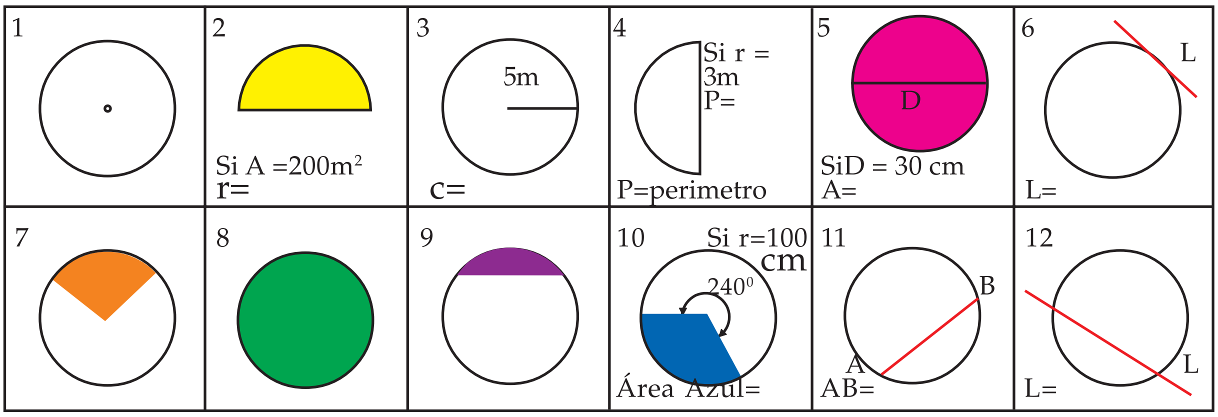


Los demás puntos se pueden localizar como se explicó en el primer ejercicio de la **vivencia**.



Por conveniencia, tomemos el eje de la parábola de tal manera que coincida con el eje Y de un sistema cartesiano de coordenadas y el origen del sistema es el vértice de la parábola.

La directriz estará a una distancia "a" del eje X y es paralela al mismo. Esta pasa por el punto (0, - a).



A	B	C	D	E	F
$706.86cm^2$	SEGMENTO CIRCULAR	CIRCUNFERENCIA	SECTOR CIRCULAR	$10472cm^2$	15.42m
G	**H**	**I**	**J**	**K**	**L**
31.42 cm	CUERDA	CÍRCULO	11.28 m	TANGENTE	SECANTE

Para realizar el ejercicio anterior, es posible que se hayan consultado diferentes fuentes de información para recordar algunos conceptos. Consigno en mi cuaderno las siguientes definiciones y ubico la fuente de información utilizada.

1. Circunferencia.
2. Círculo.
3. Sector circular.
4. Segmento circular.
5. Tangente.
6. Secante.
7. Cuerda.

Solicito la asesoría al profesor para revisar las definiciones.

Antes de abordar el tema **ECUACIÓN DE LA CIRCUNFERENCIA**, es necesario tener muy seguros los conceptos relacionados con **la circunferencia y sus elementos** y sus teoremas.

Con los compañeros de subgrupo, analicemos los siguientes contenidos y realicemos muy atentamente los ejercicios que se nos proponen.

LA CIRCUNFERENCIA Y SUS ELEMENTOS

Para repasar los conocimientos que tiene sobre circunferencias debe **utilizar** la información que aparece a continuación y **decidir** qué conceptos consigna en el cuaderno y qué ejercicios realiza.

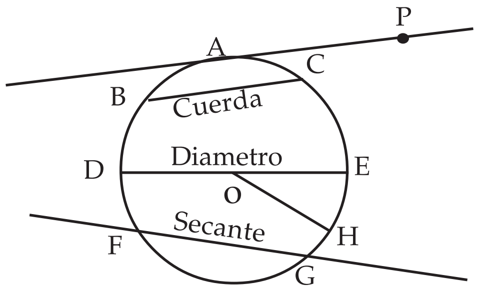
CIRCUNFERENCIA: es el conjunto de puntos en un plano que están a una distancia dada de un punto dado en ese plano. El punto dado es el centro de la circunferencia y la distancia dada es el **radio**. Cualquier segmento que una el centro con un punto de la circunferencia es llamado radio. Todos los radios de una circunferencia son congruentes.

CUERDA: es un segmento que une dos puntos de una circunferencia.

SECANTE: es una línea que contiene una cuerda.

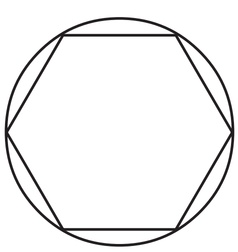
DIÁMETRO: es la cuerda que contiene el centro de la circunferencia.

TANGENTE: es una línea en el plano de la circunferencia que intersecta la circunferencia en exactamente un punto, llamado el **punto de tangencia**.

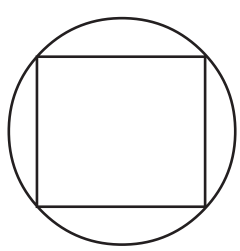


BC= Cuerda
FG= Secante
DE= Diámetro
AP= Tangente
OH=OD= OE= radios
A=Punto de tangencia.

Un polígono está INSCRITO EN UNA CIRCUNFERENCIA y la circunferencia está CIRCUNSCRITA al polígono si cada vértice del polígono toca la circunferencia.

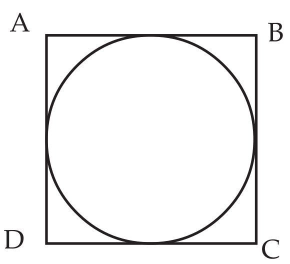


Hexágono inscrito en la circunferencia

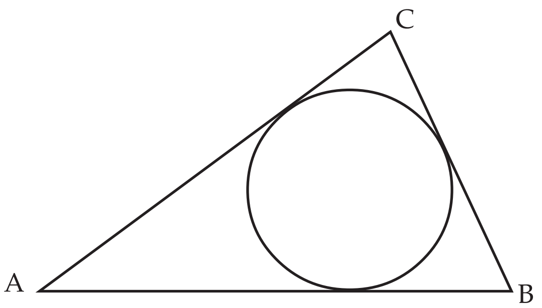


Circunferencia circunscrita al cuadrado

Un polígono está CIRCUNSCRITO a una circunferencia si cada lado del polígono **es tangente** a la circunferencia. En otras palabras la circunferencia está INSCRITA en el polígono.



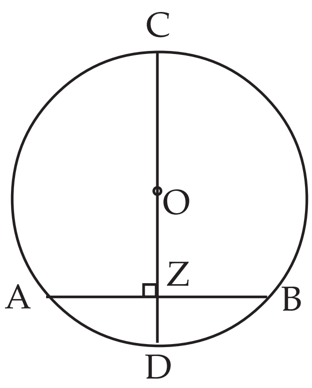
Circunferencia inscrita
en el cuadrado ABCD.



Triángulo ABC circunscrito
a la circunferencia

TEOREMAS SOBRE CIRCUNFERENCIAS Y SUS ELEMENTOS

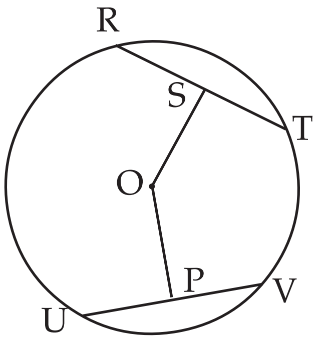
Analizo los siguientes teoremas, sin demostraciones, las que se dejan para la complementación (E). Los consigno en mi cuaderno, si lo considero necesario.



Teorema 1

Un diámetro que es perpendicular a una cuerda, bisecta la cuerda y su arco.

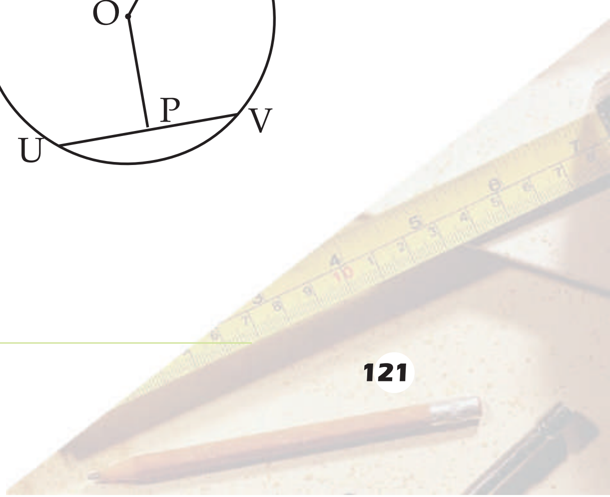
Si $CD \perp AB$, entonces,
$AZ \cong BZ \wedge$ Arco $AD \cong$ Arco BD



Teorema 2

a) Cuerdas a igual distancia del centro son congruentes.
b) Cuerdas congruentes están a la misma distancia del centro.

Si $OS = OP$, entonces, $RT \cong UV$
Si $RT \cong UV$, entonces $OS \cong OP$

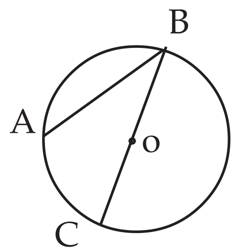


Teorema 3

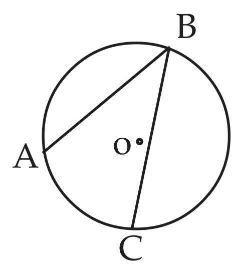
La medida de un ángulo inscrito en una circunferencia es igual a la mitad de la medida de su arco interceptado.

Si $\angle ABC$ está inscrito en la circunferencia entonces,

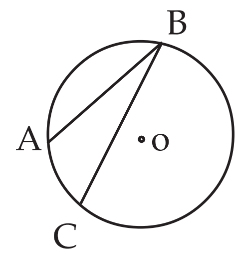
$m\angle ABC = \dfrac{1}{2}\, m\,(\text{Arco } AC)$



CASO 1:
Un lado del ángulo pasa por el centro.

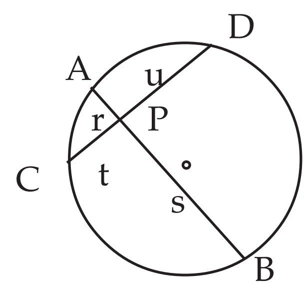


CASO 2:
El centro está en el interior del ángulo.



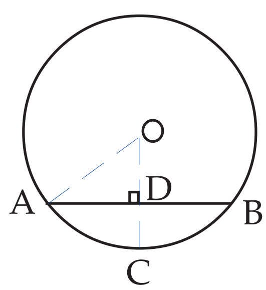
CASO 3:
El centro queda fuera del ángulo.

TEOREMA **4**. Cuando dos cuerdas se cortan, el producto de los segmentos de una cuerda es igual al producto de los segmentos de la otra cuerda.



Si AB intersecta CD, entonces $r \times s = t \times u$

EJEMPLO **1**. Estudio los siguientes ejemplos que aplican los teoremas anteriores. Servirán de base para resolver los ejercicios propuestos.



1. Encuentro la longitud de una cuerda que está a una distancia de 5 m del centro de una circunferencia de radio 8 m.

Trazo un radio perpendicular a la cuerda:
Si $OC \perp AB$, entonces $AD \cong DB$ (Teorema 1)
Aplico el Teorema de Pitágoras en el ΔOAD:
Si $OD = 5$ m y $OA = 8$ m, entonces:

$AD^2 = AO^2 - OD^2$
$AD^2 = 8^2 - 5^2$
$AD^2 = 64 - 25$
$AD^2 = \sqrt{39}$

Como $DB = AD = \sqrt{39}$,
$AB = AD + DB = 2\sqrt{39}$ m

EJEMPLO **2**. Encuentro el valor de “x“ y “y“ en la circunferencia.

$m\angle ADE = \frac{1}{2}$ m (Arco AE) (Teorema 3).

$x = \frac{1}{2} \times 40^0$

$x = 20°$

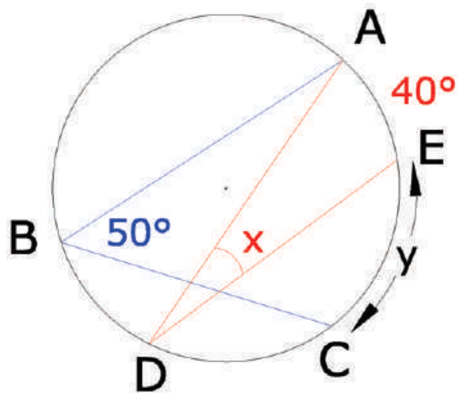
$m\angle ABC = \frac{1}{2}$ m (Arco AC) = 50°

$mAC = 100^0$

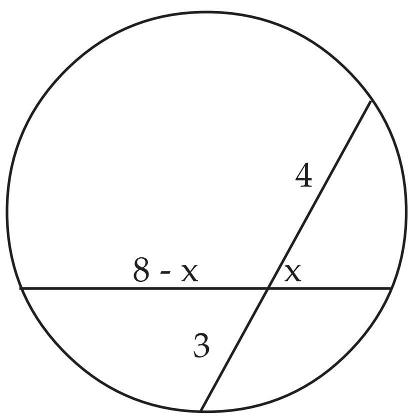
y = Arco AC - Arco AE

y = 100° - 40°

y = 60°



EJEMPLO 3. Encuentro el valor de x.



$x\,(8 - x) = 3 \times 4$

$8x - x^2 = 12$

$x^2 - 8x + 12 = 0$

$(x - 6)\,(x - 2) = 0$

$x - 6 = 0 \quad \vee \quad x - 2 = 0$

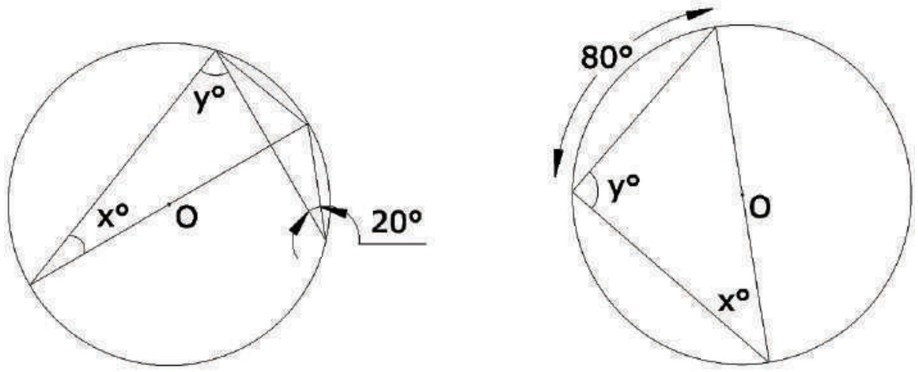
$\mathbf{x = 6} \quad \vee \quad \mathbf{x = 2}$

EJERCICIOS. **Analice los ejemplos anteriores y utilice los teoremas vistos** para resolver los siguientes ejercicios.

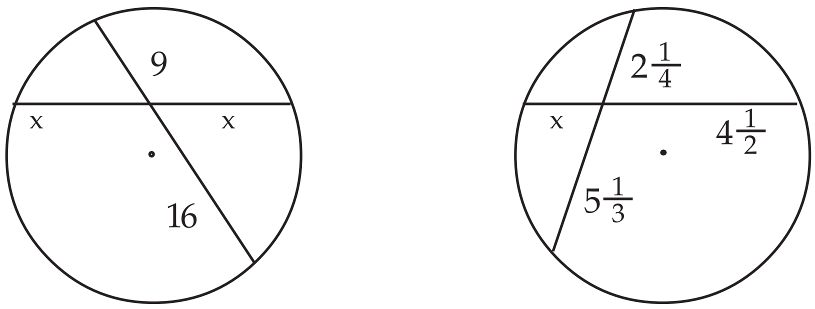
1. Encuentre la longitud de una cuerda que está a una distancia de 5 cm del centro de una circunferencia de radio 13 cm. Haga una gráfica.

2. ¿A qué distancia del centro de una circunferencia de radio 17 m, se encuentra una cuerda de 30 m? Haga una gráfica.

3. Encuentre los valores de "x" y "y" en las gráficas.



4. Encuentre el valor de x.

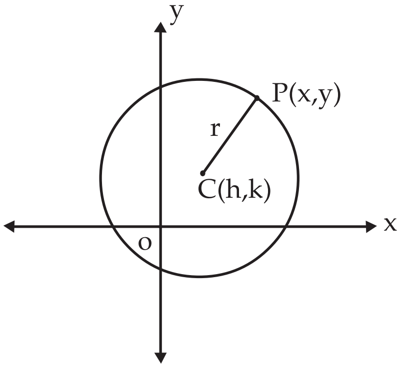


Presento, **en forma organizada**, las respuestas al profesor.

BC ECUACIÓN DE LA CIRCUNFERENCIA

Recordemos que una **circunferencia** es el lugar geométrico de los puntos del plano que están a la **misma distancia** de un punto fijo llamado el **centro**.

Con base en la definición, podemos encontrar una ecuación que nos determine una circunferencia con centro en C (h, k) y radio r.



Si P(x, y) es un punto variable sobre la circunferencia, entonces el conjunto: {(x, y): d(PC) = r} define la circunferencia. Aplicando la fórmula de distancia:

$$\{(x, y): \sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2} = r\}$$

Si elevamos al cuadrado se obtiene que

$\{(x, y): (x- h)^2 + (y- k)^2 = r^2\}$

Por lo tanto, **la relación que define una circunferencia de radio r y centro** C (h, k) es:

$$\{(x, y): (x- h)^2 + (y - k)^2 = r^2\}$$

Si tiene interés en actualizar su información, visite la Sala Virtual y consulte la siguiente dirección:

http://www. Cnice. mecd. es / Descartes / 4b_eso / la_circunferencia.

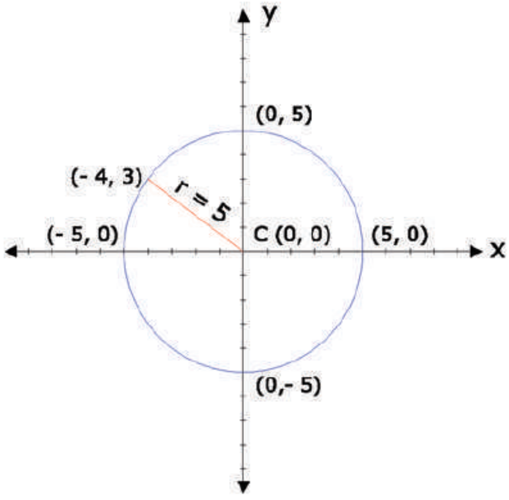
Cuando esté navegando consulte la definición, la gráfica, la ecuación y practique los juegos.

A continuación analizo con mis compañeros de subgrupo los ejemplos y resuelvo los ejercicios correspondientes, los cuales consigno en mi cuaderno.

EJEMPLO 4. Encuentro la ecuación de la circunferencia con centro en el origen y radio 5.

En este caso el centro es C (0, 0)

$$\begin{cases} h = 0 \\ k = 0 \\ r = 5 \end{cases}$$



Reemplazando en la ecuación de la circunferencia:

$\{(x, y): (x-0)^2 + (y- 0)^2 = 5^2\}$

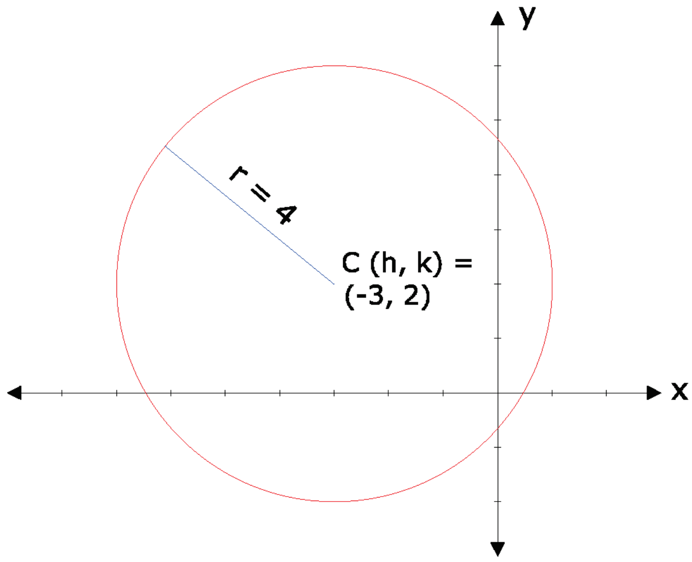
$\{(x, y): x^2 + y^2 = 25\}$ es la Ecuación pedida.

EJEMPLO 5. Encuentro la ecuación de la circunferencia con centro en (- 3, 2) y radio 4.

Aplico la relación:

$\{(x, y): (x- h)^2 + (y -k)^2 = r^2\}$

$$\begin{cases} h = -3 \\ k = 2 \\ r = 4 \end{cases}$$



$\{(x, y): (x - (-3))^2 + (y -2)^2 = 16\}$

$\{(x, y): (x +3)^2 + (y -2)^2 = 16\}$

$\{(x, y): x^2 +6x+9+y^2 -4y +4 = 16\}$

Reúno términos semejantes:

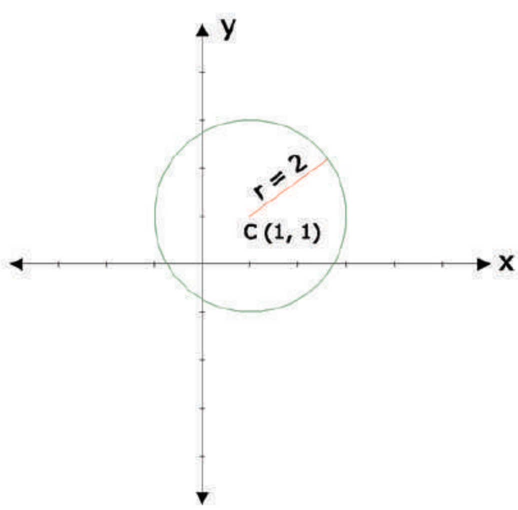
$\{(x, y): x^2 +y^2 +6x-4y - 3 = 0\}$es la ecuación pedida.

EJEMPLO 6. Encuentro el centro y el radio de la circunferencia definida por: $\{(x, y): x^2 +y^2 -2x-2y = 2 \}$

Es necesario escribir la ecuación dada en la forma:

$(x-h)^2 +(y - k)^2 =r^2$

$(x^2 -2x)+(y^2 - 2y) =2$



Completo un cuadrado en cada paréntesis así:

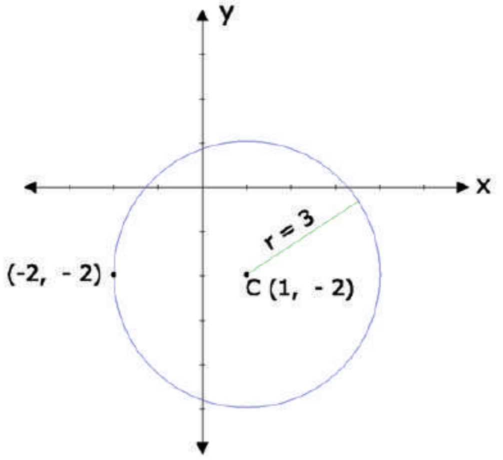
$(x^2 -2x+1)+(y^2 - 2y+1) -2 =2$

(Sumando y restando 2 al primer miembro)

$(x -1)^2+(y -1)^2 =2^2$

Comparando esta última ecuación con la ecuación de la circunferencia, concluyo que el centro (h, k) queda en el punto C (1, 1) y el radio mide 2.

EJEMPLO 7. Encuentro el centro y el radio de la circunferencia definida por la relación $3x^2 + 3y^2 - 6x + 12y = 12$.



Verifico si el punto (- 2, - 2) pertenece a la circunferencia.

Divido ambos miembros por 3:

$x^2 + y^2 - 2x + 4y = 4$

Completo los cuadrados de una diferencia y una suma, con los términos en "x" y los términos en "y".

$(x^2 - 2x) + (y^2 + 4y) = 4$

$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 4y + 4) - 1 - 4 = 4$

$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$

$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 3^2$

Comparando con la ecuación de la circunferencia: h = 1, k = - 2 y r = 3. Por lo tanto, **el centro es el punto C (1, - 2) y el radio es 3.**

Para verificar si el punto (- 2, - 2) pertenece a la circunferencia, reemplazo x = - 2, y = - 2 en la ecuación original:

$3(-2)^2 + 3(-2)^2 - 6(-2) + 12(-2) = 12$

$12 + 12 + 12 - 24 = 12$

$12 = 12$

El punto (- 2, - 2) si pertenece a la circunferencia. $3x^2 + 3y^2 - 6x + 12y = 12$.

EJERCICIOS. **Analice** cada ejercicio y recoja la información necesaria para resolverlos, repasando los ejemplos. Haga una gráfica de cada uno.

1. Encuentre la ecuación de la circunferencia con centro en (0, 2) y radio $\sqrt{2}$.

2. Encuentre la ecuación de la circunferencia con centro en (- 3, - 2) y radio 3.

3. Encuentre el radio de la circunferencia que pasa por (2, 3) y tiene por ecuación definidora: $\{ (x,y): (x-4)^2 + (y-3)^2 = r^2 \}$

4. Encuentre los puntos donde la circunferencia $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 16$ corta al eje X y al eje Y.

5. Encuentre el centro y el radio de la circunferencia cuya ecuación es: $x^2 + y^2 - 4x + 3y = 0$

6. Encuentre el centro y el radio de la circunferencia cuya ecuación es: $3y^2 + 3x^2 - 12x + 6y - 12 = 0$

Presento los ejercicios al profesor **en forma organizada**.

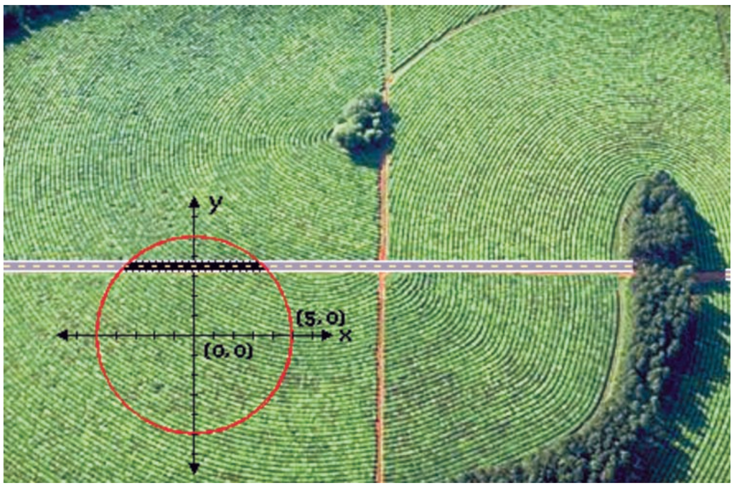
D APLICACIÓN

Para resolver los siguientes ejercicios, debemos buscar la información necesaria, teniendo en cuenta todas las fuentes a nuestro alcance. Demostremos nuestra habilidad para gestionar tal información.

La Gestión de la información se evidencia en la escuela desde las actividades de aplicación.

La **Gestión de la información** integra conocimientos y habilidades en las dimensiones teórico-prácticas.

1. Halle la longitud de la cuerda que determina los puntos de intersección de la circunferencia $x^2 - 2x + y^2 - 2y - 23 = 0$ y la recta $y - x + 1 = 0$. Haga una gráfica exacta.



2. Una carretera pasa por un terreno circular de 5 km. de radio. La ecuación que define la carretera es: $\mathbf{x - 7y + 25 = 0}$.

   Encuentre la longitud de la carretera que atraviesa ese terreno.

3. Encuentre los puntos de intersección de dos "roundpoints" en una autopista cuyas ecuaciones son: $(x + 1)^2 + y^2 = 16$ y $(x - 2)^2 + y^2 = 4$.

4. Pruebe por cualquier método que las circunferencias dadas por: $x^2 + y^2 - 8x + 4y - 29 = 0$ y $x^2 + y^2 - 4y - 5 = 0$ son tangentes.

¿QUIERE SABER MÁS?

La Gestión de la Información forma estudiantes calificados en el manejo de los procesos tecnológicos para el acceso, manejo y producción de la información.

Elevando al cuadrado los dos miembros con el fin de destruir uno de los radicales:

$$\text{ELIPSE} = \{ (x,y): \quad (x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 2 \,(2a \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\,) + (x-c)^2 + y^2 \}$$

$$\text{ELIPSE} = \{ (x,y): \quad x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2xc + c^2 + y^2 \}$$

Simplificando:

$$\text{ELIPSE} = \{ (x,y): \quad 4xc = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \}$$

Dividiendo por 4 los dos miembros:

$$\text{ELIPSE} = \{ (x,y): \; cx - a^2 = -a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \}$$

Elevando al cuadrado nuevamente:

$$\text{ELIPSE} = \{ (x,y): \quad c^2x^2 - 2cxa^2 + a^4 = a^2 (x-c)^2 + a^2 y^2 \}$$

Simplificando, transponiendo términos y cambiando signos:

$$\text{ELIPSE} = \{ (x,y): \quad c^2x^2 - 2cxa^2 + a^4 = a^2x^2 - 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2 \}$$

$$\text{ELIPSE} = \{ (x,y): \quad c^2x^2 - a^2x^2 + a^4 - a^2c^2 = a^2y^2 \}$$

$$\text{ELIPSE} = \{ (x,y): \quad -a^2x^2 + c^2x^2 - a^2y^2 = -a^4 + a^2c^2 \}$$

$$\text{ELIPSE} = \{ (x,y): \quad a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2 \}$$

Factorizando:

$$\text{ELIPSE} = \{ (x,y): \; x^2 (a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2 (a^2 - c^2) \}$$

Dividiendo por $a^2 (a^2 - c^2)$:

$$\text{ELIPSE} = \left\{ (x,y): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1 \right\}$$

Pero de la ecuación (2): $a^2 - c^2 = b^2$

Finalmente la ecuación se convierte en:

$$\text{ECUACIÓN DE LA ELIPSE} = \left\{ (x,y): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}$$

La distancia **OM = b** se llama **semieje menor** de la elipse, la distancia **OC = a** se llama **semieje mayor**. Los extremos del eje mayor se llaman **vértices** de la elipse y el origen **centro** de la misma.

Si **a = b**, la ecuación de la elipse se convierte en la ecuación de una circunferencia de radio "a". En efecto:

$$\left\{ (x,y): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \right\} \Leftrightarrow \quad \{ (x,y): x^2 + y^2 = a^2 \}$$

Si hemos entendido todo hasta aquí, quiere decir que la **comunicación** ha sido excelente: los símbolos han sido bien interpretados, el lenguaje verbal de mis compañeros y de mi Profesor ha sido claro, adecuado y convincente.

Muchas veces, con el objetivo de retar la mente, nos hemos enfrentado a preguntas de difícil interpretación. Tratemos de resolver algunas, para destacar la importancia de una buena **comunicación:**

1. ¿Cómo puede usted tener $700 con dos monedas, si una de las monedas no es de $200?

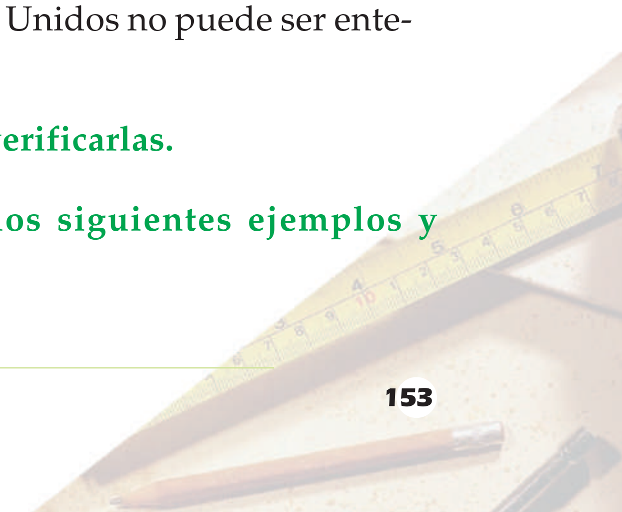
2. Una cámara con su estuche cuesta US110, si la cámara vale US100 más que el estuche, ¿Cuánto vale el estuche?

3. Si en una escuela se demoran 2 minutos en izar una bandera. ¿Cuánto tiempo se demorarán en izar la bandera a media asta?

4. ¿Por qué un colombiano que vive en Estados Unidos no puede ser enterrado en Colombia?

Comparto mis respuestas con el profesor para verificarlas.

Con mis compañeros de subgrupo, analizo los siguientes ejemplos y resuelvo los ejercicios propuestos:



EJEMPLO 1: Encuentro la ecuación de una elipse que tiene sus focos en F_1 (- 3, 0) y F_2 (3, 0) y cuyo semieje menor tiene una longitud de tres unidades.

$$\text{ELIPSE} = \left\{ (x,y): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\} \qquad \begin{array}{l} a=? \\ b=3 \\ c=3 \end{array}$$

Como $a^2 = b^2 + c^2$; $a^2 = 3^2 + 3^2 = 18$

Por lo tanto, ELIPSE = $\left\{ (x,y): \frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1 \right\}$ que es la ecuación pedida.

EJEMPLO 2. Dada la ecuación de la elipse $\{(x, y): 4x^2 + 9y^2 = 36\}$ encuentro el valor de los semiejes y la localización de los focos.

$4x^2 + 9y^2 = 36$

Divido cada término por 36:

$$\frac{4x^2}{36} + \frac{9y^2}{36} = \frac{36}{36}$$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$$

Comparando con la ecuación de la elipse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Semieje mayor = a = 3; semieje menor = b = 2.

Aplicando la ecuación $a^2 = b^2 + c^2$, puedo encontrar el valor de **c**.

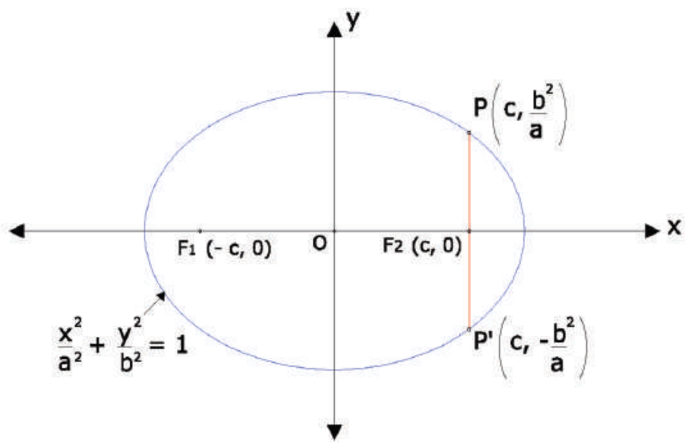
$c^2 = a^2 - b^2$
$c^2 = 9 - 4$
$c = \pm\sqrt{5}$

Los focos están situados en $F_1 (-\sqrt{5}, 0)$ y $F_2 (\sqrt{5}, 0)$.

EJEMPLO 3. Encuentro la longitud de LATUS RECTUM de una elipse. El LATUS RECTUM de una elipse es el segmento perpendicular al eje mayor que pasa por uno de los focos y une dos puntos de una elipse.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$ (Ecuación de la elipse)

$$\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{x^2}{a^2}=\frac{a^2-x^2}{a^2}$$



El punto P (c, y) está sobre la elipse, luego, al hacer x = c, se tiene

$$\frac{y^2}{b^2}=\frac{a^2-c^2}{a^2}$$; pero $a^2 - c^2 = b^2$

$$\frac{y^2}{b^2}=\frac{b^2}{a^2}$$

$$y^2=\frac{b^2\cdot b^2}{a^2}$$

$y=\pm\frac{b^2}{a}$, por lo tanto los puntos P $\left(c,\frac{b^2}{a}\right)$ y P′$\left(c,-\frac{b^2}{a}\right)$ son los puntos de la elipse que están unidos al LATUS RECTUM.

Para encontrar la longitud del LATUS RECTUM (PP′), basta sumar las ordenadas de P y P′, pero tomando positiva la ordenada de P′.

$$\boxed{PP'=\frac{b^2}{a}+\frac{b^2}{a}=\frac{2b^2}{a}}$$ que es la longitud del LATUS RECTUM.

EJEMPLO 4. Encuentro la longitud del LATUS RECTUM y hago la gráfica de la elipse $\{(x, y): 9x^2 + 16y^2 = 144\}$.

Divido los dos miembros de la ecuación por 144

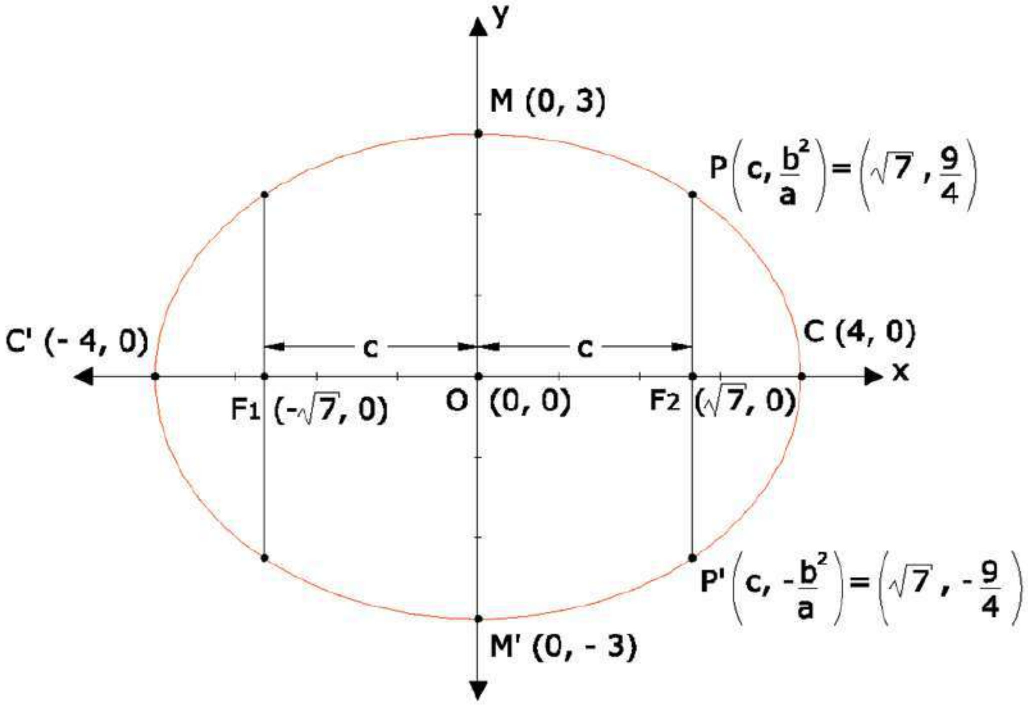
$$\frac{9x^2}{144}+\frac{16y^2}{144}=\frac{144}{144}$$

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$$

Comparando esta última con la ecuación : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$:

a = 4 y b = 3.

LATUS RECTUM = $\frac{2b^2}{a}=\frac{2\times 9}{4}=\frac{9}{2}$



El valor de **c**, se encuentra aplicando la fórmula $\mathbf{a^2 = b^2 + c^2}$: $c^2 = a^2 - b^2$.

$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{16-9}=\pm\sqrt{7}$

En la gráfica se puede verificar que el Eje mayor = 2a = 8 cm., el eje menor igual a 2b = 6 cm. y la distancia entre los dos focos $F_1F_2 = 2c = 2\sqrt{7}\approx 5.3$ cm. Además la distancia $MF_2 = MF_1 = a =$ 4cm. y los **vértices** de la elipse son los puntos (- 4, 0) y (4, 0).

EJEMPLO 5. Encuentro los focos y dibujo la elipse: $\left\{(x, y) : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1\right\}$

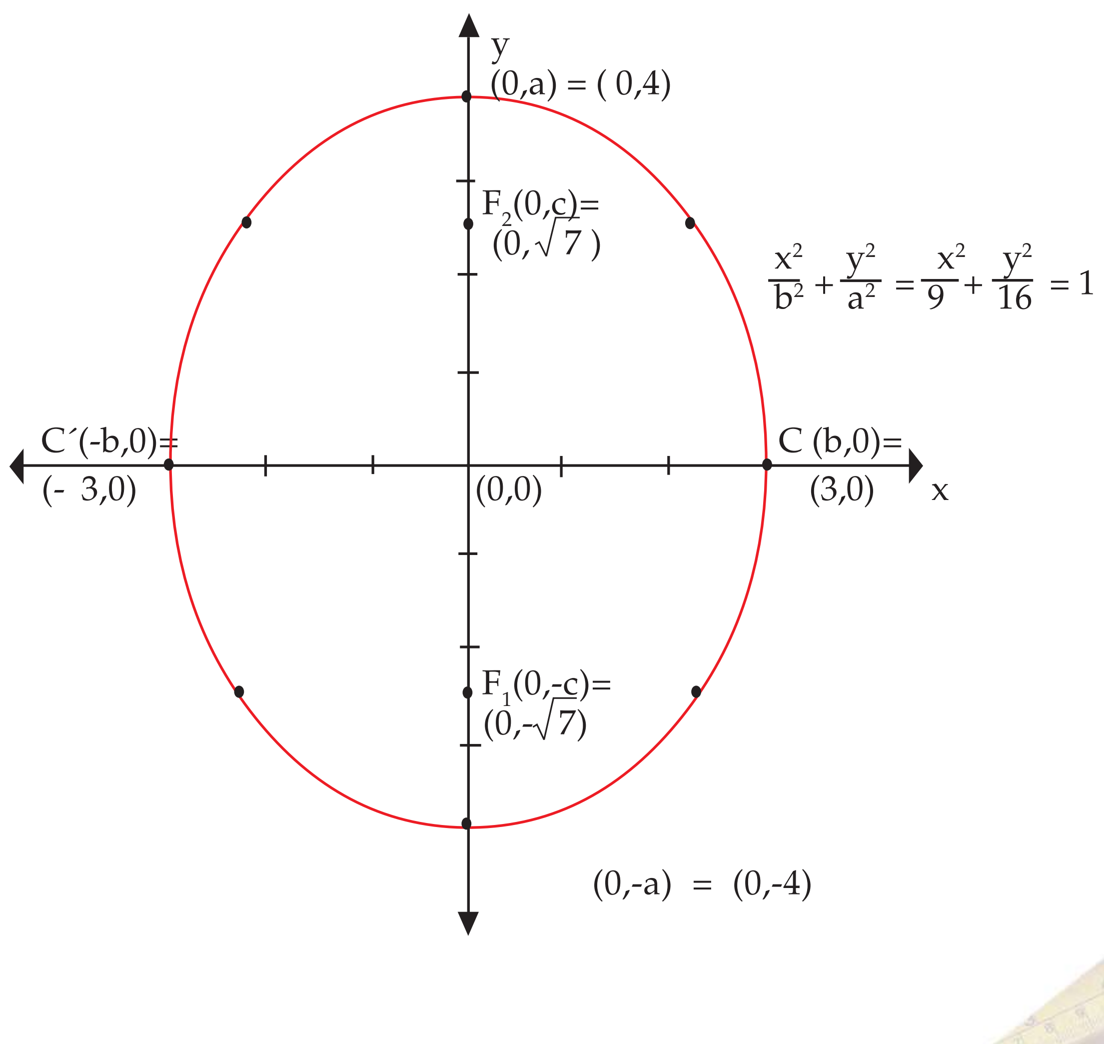
La ecuación $\left\{(x,y):\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\right\}$ tiene semieje mayor = a, por lo tanto a > b y los focos están situados en el eje X. Si el denominador de x^2 es menor que el de y^2, entonces la ecuación de la elipse tiene la forma $\left\{(x,y):\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1\right\}$ **y los focos están situados en el eje Y.**

Comparando esta última fórmula con la ecuación dada:

$\left\{(x,y):\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1\right\}$ se tiene que **b = 3 y a = 4**

Para hallar los focos, aplico la fórmula $a^2 = b^2 + c^2$:

$c^2 = a^2 - b^2$; $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{16 - 9} = \pm\sqrt{7}$



EJERCICIOS.

Para resolver los siguientes ejercicios es muy importante la **comunicación escrita**, pues si una letra cambia de posición en la fórmula, su gráfica también cambia.

1. Con uno o dos compañeros, encuentre las longitudes de los semiejes, la localización de los focos de las siguientes elipses y dibújelas. Manejemos con respeto los conceptos de los compañeros.

   a. $\{(x, y): x^2 + 2y^2 = 1\}$
   b. $\{(x, y): 16x^2 + 25y^2 = 400\}$
   c. $\{(x, y): 9x^2 + y^2 = 9\}$

2. Encuentre la ecuación de la elipse:

   a. Si los focos están en (- 2, 0) y (2, 0) y el semieje mayor vale 3.
   b. Si los focos están en (0, 1) y (0, - 1) y el semieje menor vale 2.
   c. Que tiene por semieje mayor 5 y semieje menor 2, los focos sobre el eje X y centro en el origen.

3. Encuentre los puntos donde se corta la elipse $\{(x, y): x^2 + y^2 = 1\}$ con la recta $\{(x, y): y = x\}$.

4. Encuentre el LATUS RECTUM de la elipse $x^2 + 4y^2 = 4$.

5. Encuentre los puntos de intersección de la elipse $\{(x, y): x^2 + 4y^2 = 1\}$

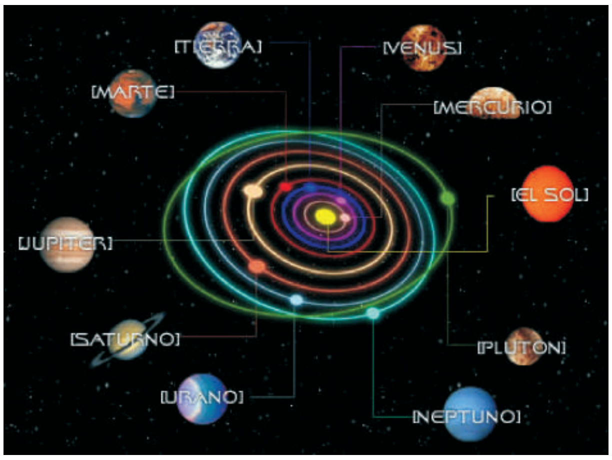
   a. con el eje X.
   b. con el eje Y.

Compartimos las soluciones con nuestro profesor.

¿QUÉ APLICACIONES TIENEN LAS ELIPSES?

Las experiencias comunicativas estimulan el crecimiento personal y mejoran la autoestima. Para tal efecto preparo las siguientes actividades:

1. Consulto las investigaciones de Kepler, especialmente su Primera Ley: "Los planetas en su movimiento describen órbitas elípticas, en uno de cuyos focos está situado el Sol".

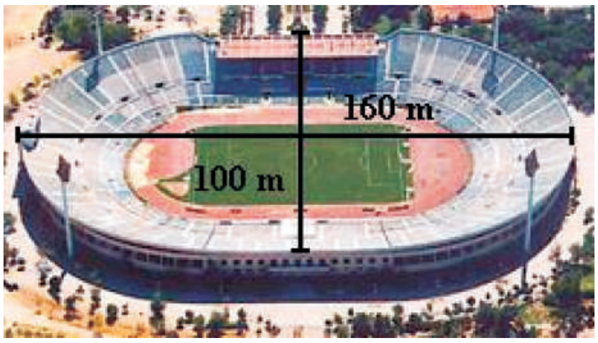


2. Preparo una exposición para participar en las actividades de conjunto, cuando me corresponda.

3. Coloque dos clavos en puntos F_1 y F_2 sobre una tabla. Tome una cuerda de 20 cm. de longitud con ojales en los extremos, que colocará en cada uno de los dos clavos. Dibuje una elipse como se explicó al principio de esta guía.

4. Coloque los clavos del ejercicio 3 sobre una línea recta y muévalos sobre la misma separándolos o acercándolos para obtener distintas elipses.

   a. ¿Qué pasa a las elipses a medida que se acercan los clavos?
   b. ¿Qué pasa si se juntan los dos clavos?
   c. ¿Qué pasa si se alejan tanto como la longitud de la cuerda?



5. Halle el área de un terreno elíptico, donde se va a a construir un estadio, si el semieje mayor mide 160 m. y el semieje menor 100 m.

   $(A = \pi ab)$

Discutimos las respuestas con el profesor.

¿DESEA AMPLIAR SUS CONOCIMIENTOS?

La comunicación se evidencia en la escuela con el manejo de los materiales de autoaprendizaje, que generan espacios para compartir ideas y concretar conceptos.

1. Consulte en la Biblioteca las investigaciones de Copérnico, quien escribió su famosa obra **De revolutionibus Orbium Coelestium**, relacionadas con la teoría heliocéntrica.

2. Consulte el concepto "excentricidad" relacionado con la elipse.

3. Visite la Sala Virtual y consulte:

   a. Elipsoide.
   b. Coordenadas Elípticas

4. Visite la Sala Virtual, utilice el CD " Páginas Web de Matemáticas" y siga las siguientes instrucciones:

   - Descartes
   - Unidades Didácticas
   - Segundo Ciclo de Enseñanza Secundaria Obligatoria
   - 4° de ESO Opción B
   - Las Cónicas como lugares geométricos. Trazado
   - ÍNDICE
   - 1. Elipse
   - Siga las instrucciones y verifique los conceptos vistos en esta guía.

Unifico conceptos con mis compañeros y presentamos un informe concreto al Profesor.

LA COMUNICACIÓN PERMITE ALCANZAR CON MÁS FACILIDAD LOS LOGROS PROPUESTOS TANTO A NIVEL INDIVIDUAL COMO ORGANIZACIONAL.

ESTUDIO Y ADAPTACIÓN DE LA GUÍA

Guía 6

LA HIPÉRBOLA:
ASÍ SE MUEVEN LOS COMETAS

Indicadores de logros

- ✓ Define la hipérbola y la representa gráficamente.
- ✓ Deduce y grafica, como lugares geométricos, las hipérbolas dadas por:

$$\left\{(x,y): \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\right\} \quad ; \quad \left\{(x,y): \frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1\right\}$$

- ✓ Aplica los conceptos de hipérbola en situaciones de la vida real.
- ✓ Identifica y aplica la Ecuación General de las Cónicas en la solución de diferentes situaciones prácticas.
- ✓ Analiza las ventajas y desventajas de las alternativas posibles, para elegir la más adecuada (TOMA DE DECISIONES).
- ✓ Asume responsabilidad por las decisiones tomadas.
- ✓ Comunica sus decisiones en forma oportuna.
- ✓ Toma decisiones en forma oportuna.

Proceso de toma de decisiones

Con los compañeros leemos y analizamos la siguiente información.

La TOMA DE DECISIONES hace parte de las **competencias intelectuales** que están asociadas a capacidades y habilidades del pensamiento.

La Toma de Decisiones es uno de los procesos esenciales en la planeación, es la capacidad para seleccionar alternativas de acción. Exige compromiso, responsabilidad y riesgo.

¿Cómo se hace un proceso de toma de decisiones?

Con mis compañeros de subgrupo, hago el siguiente ejercicio de apareamiento, para responder a la pregunta anterior.

En el proceso de toma de decisiones debemos preguntarnos:

1. ¿Qué hacer?
2. ¿Quién lo debe hacer?
3. ¿Cuáles son las alternativas?
4. ¿Dónde se hará?
5. ¿Cómo se debe hacer?
6. ¿Con qué se hará?
7. ¿Qué resultados se esperan?
8. ¿Cuándo se debe hacer?

a. O sea el tiempo.

b. O sea el lugar.

c. O sea las normas.

d. O sea las tareas.

e. O sea los recursos que se necesitan.

f. O sea la evaluación de posibilidades.

g. O sea la elección de alternativas y las estrategias a utilizar para su aplicación.

h. O sea los responsables.

Presento las respuestas al profesor, apareando el número con la letra correspondiente.

LA HIPÉRBOLA

Entre los beneficios que trae la **Toma de Decisiones** están asumir responsabilidades y compromisos con uno mismo, las personas que nos rodean y el colegio.

Para dar lo mejor de mí, analizo mis presaberes, respondiendo las siguientes preguntas, con mis compañeros de subgrupo.

1. ¿Cuál es la definición de la parábola?
2. ¿Cuál es la definición de la elipse?
3. ¿El Latus Rectum tiene el mismo significado en la parábola y la elipse?
4. ¿Qué relación existe entre la circunferencia y la elipse?
5. Encuentre la ecuación de la elipse con vértice en (5, 0), longitud de Latus Rectum 18/5 y centro en el origen.
6. ¿Qué es una asíntota?
7. Halle la distancia entre los puntos A (5, 3) y B (3, 0).

Presento a mi profesor los ejercicios resueltos.

ECUACIÓN DE LA HIPÉRBOLA

Visito la Sala Virtual. Para consultar información acerca de **hipérbola** puedo utilizar el CD "Encarta" o el CD "Páginas Web de Matemáticas". Con mis compañeros de subgrupo, después de analizar las ventajas y desventajas, **decidimos** qué fuente consultar, qué temas explorar y qué conclusiones debemos consignar en el cuaderno.

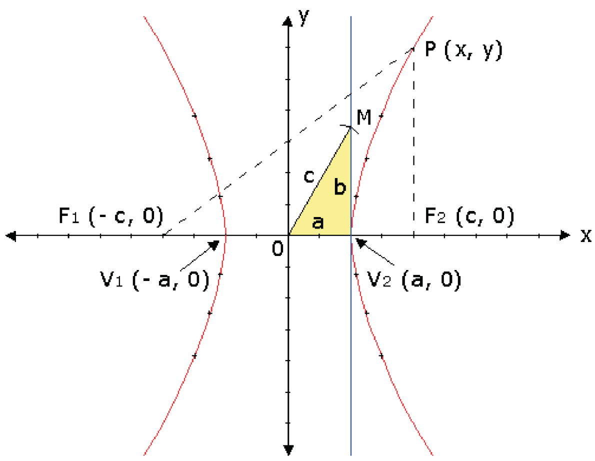
Seguramente en la actividad anterior, se consultó la definición de Hipérbola.

Comparo dicha definición con la siguiente y decido si es necesario consignarla en mi cuaderno.

HIPÉRBOLA. Es el conjunto de puntos del plano tales que la diferencia de las distancias a dos puntos fijos llamados **focos** es constante e igual a **2a**.

Analizo detalladamente la deducción de la ecuación que define **la hipérbola** o sea el conjunto de pares ordenados que cumplen la condición dada.

Si P(x, y) es un punto que recorre la hipérbola y los focos están situados, por conveniencia, en los puntos F_1 (- c, 0) y F_2 (c, 0), de acuerdo con la definición y la figura, se tiene:



HIPÉRBOLA = {(x, y): $PF_1 - PF_2 = 2a$}

Pero: $PF_1 = \sqrt{(x + c)^2 + y^2}$

$PF_2 = \sqrt{(x - c)^2 + y^2}$

HIPÉRBOLA = {(x, y): $\sqrt{(x+ c)^2 + y^2} - \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a$} (1)

Transponiendo el segundo radical al lado derecho:

$$\sqrt{(x+ c)^2 + y^2} = 2a + \sqrt{(x - c)^2 + y^2}$$

Elevando al cuadrado los dos miembros para eliminar el radical:

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

Simplificando:

$$\cancel{x^2} + 2xc + \cancel{c^2} + \cancel{y^2} = 4a^2 + 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + \cancel{x^2} - 2xc + \cancel{c^2} + \cancel{y^2}$$

$$4xc = 4a^2 + 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2}$$

Dividiendo los dos miembros por 4 y agrupando términos:

$$xc - a^2 = a\sqrt{(x - c)^2 + y^2}$$

Elevando al cuadrado para eliminar el otro radical:

$$x^2c^2 - 2a^2xc + a^4 = a^2(x - c)^2 + a^2y^2$$

$$x^2c^2 - 2a^2xc + a^4 = a^2x^2 - 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2$$

$$x^2c^2 - a^2x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4$$

Factorizando:

$$x^2(c^2 - a^2) - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

Dividiendo por $a^2(c^2 - a^2)$:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1 \qquad (2)$$

En el ΔOV_2M, que se trazó tal que $OM = c$, aplicamos el Teorema de Pitágoras: $c^2 = a^2 + b^2$, por lo tanto $c^2 - a^2 = b^2$. (3)

Reemplazando (3) en (2), obtenemos la ecuación de la hipérbola:

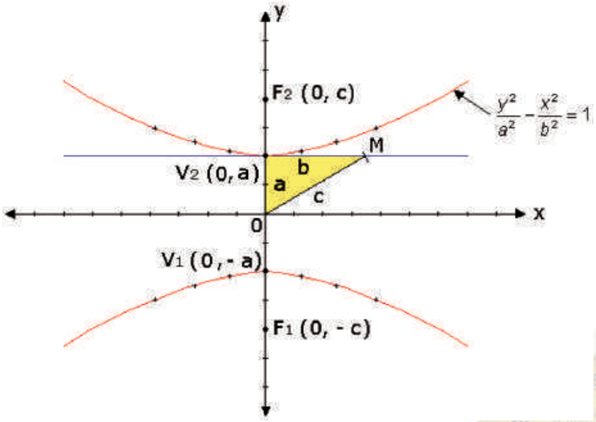
$$\left\{ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}$$

Ecuación de la hipérbola: $\boxed{\left\{ (x,y) : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}}$

Haciendo $y = 0$, en la ecuación anterior, se tiene $x = \pm a$. Es decir, los puntos $V_1(-a, 0)$ y $V_2(a, 0)$ son los interceptos de la hipérbola con el eje X, y "a" representa entonces, la longitud del segmento $OV_1 = OV_2$. V_1 y V_2 se llaman VÉRTICES de la hipérbola, separados una distancia **2a**. Al igual que en el caso de la elipse, si los focos están sobre el eje Y, la ecuación correspondiente es:

Ecuación de la hipérbola: $\boxed{\left\{ (x,y) : \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \right\}}$

Los focos estarán en los puntos $F_1(0, -c)$ y $F_2(0, c)$; los puntos $V_1(0, -a)$ y $V_2(0, a)$ serán los **vértices** de la hipérbola.



Comparando las ecuaciones de la hipérbola con las de la elipse, la única diferencia es el signo intercalado entre los dos cuadrados del primer miembro. Esto es:

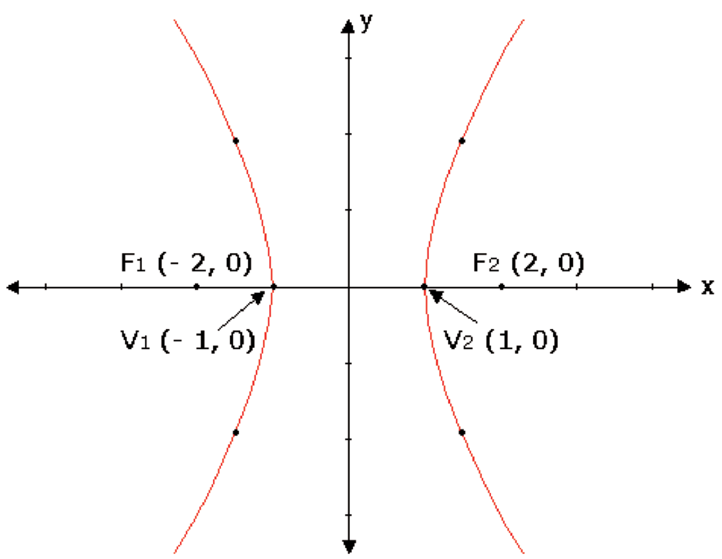
ELIPSE = $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ focos en F_1 (- c, 0) y F_2 (c, 0) con $c^2 = a^2 - b^2$.

HIPÉRBOLA = $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ focos en F_1 (- c, 0) y F_2 (c, 0) con $c^2 = a^2 + b^2$.

Analizamos entre los compañeros de subgrupo, cómo ha sido la comprensión del tema. Si aún quedan dudas o dificultades. ¿Qué podemos hacer? Tomemos alguna decisión.

Aclaradas las dudas, analicemos los siguientes ejemplos, que nos darán bases para resolver los ejercicios propuestos. No necesito consignar los ejemplos en el cuaderno.

EJEMPLO 1. Encuentro la ecuación de la hipérbola si sus focos están en F_1 (- 2, 0) y F_2 (2, 0) y uno de los vértices en V_2 (1, 0).



El foco F_2 está en (2, 0) luego c = 2.

El vértice V_2 está en (1, 0) entonces a = 1.

Como $a^2 + b^2 = c^2$,

$b^2 = c^2 - a^2 = 4 - 1 = 3$

Aplicando la ecuación de la hipérbola:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad \begin{cases} a^2 = 1 \\ b^2 = 3 \end{cases}$$

$\frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{3}=1$ que es la solución del problema.

EJERCICIOS. Resuelva los siguientes ejercicios en el cuaderno.

1. Encuentre la ecuación de la hipérbola con focos en F_1 (- 1, 0) y F_2 (1, 0) y uno de los vértices en V_2 (1/2, 0).

2. Encuentre la ecuación de la hipérbola, si uno de sus vértices está en V_1(2, 0) y el foco asociado es F_1 (3, 0).

3. Encuentre la hipérbola con uno de los focos en (0, 1) y un vértice en (0, - 1/2).

4. La ecuación $\left\{(x,y): \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{b^2} = 1\right\}$ es una hipérbola. Si el foco F_1 está en (3, 0), encontrar el valor de b.

5. La ecuación $\left\{(x,y): \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{4} = 1\right\}$ es una hipérbola. Encontrar el valor de "a" si la curva pasa por el punto (1, 1).

EJEMPLO 2. Encuentro los focos y los vértices de la hipérbola: $\{(x, y): 4x^2 - 8y^2 = 32\}$.

Divido por 32, para llegar a la ecuación $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$\frac{4x^2}{32} - \frac{8y^2}{32} = \frac{32}{32}$$

$$\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{4} = 1 \qquad \begin{cases} a^2 = 8 \quad ; \quad a = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \\ b^2 = 4 \quad ; \quad b = 2 \end{cases}$$

Como $c^2 = a^2 + b^2$, entonces $c^2 = 8 + 4 = 12$; $c = \sqrt{12} = \pm 2\sqrt{3}$.

Los focos son los puntos $F_1\left(-2\sqrt{3}, 0\right)$ y $F_2\left(2\sqrt{3}, 0\right)$.

Los vértices son los puntos $V_1\left(-2\sqrt{2}, 0\right)$ y $V_2\left(2\sqrt{2}, 0\right)$.

EJEMPLO 3. Encuentro los puntos donde la recta y = x + 1 corta la hipérbola $4x^2 - 3y^2 = 1$.

Resuelvo simultáneamente estas dos ecuaciones:

$4x^2 - 3y^2 = 1.$ (1)
$y = x + 1$ (2)

Reemplazo (2) en (1)

$4x^2 - 3(x + 1)^2 = 1$
$4x^2 - 3(x^2 + 2x + 1) = 1$
$4x^2 - 3x^2 - 6x - 3 = 1$
$x^2 - 6x - 4 = 0$

Aplico la fórmula general: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $\left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\}\begin{matrix} a = 1 \\ b = -6 \\ c = -4 \end{matrix}$

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(-4)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 16}}{2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{13}}{2} = 3 \pm \sqrt{13}$$

Las abscisas de los puntos de corte de ambas figuras son:

$3 + \sqrt{13}$ (3) y $3 - \sqrt{13}$ (4)

Reemplazo (3) en (2) se tiene

$$y = x + 1 = 3 + \sqrt{13} + 1 = 4 + \sqrt{13}$$

Reemplazo (4) en (2) se tiene

$$y = x + 1 = 3 - \sqrt{13} + 1 = 4 - \sqrt{13}$$

Los puntos de corte son:

$\left(3 + \sqrt{13}, 4 + \sqrt{13}\right)$ y $\left(3 - \sqrt{13}, 4 - \sqrt{13}\right)$

EJERCICIOS. Resuelva en el cuaderno los siguientes ejercicios:

1. Encuentre los focos, vértices y dibuje la hipérbola $\{(x, y): x^2 - 3y^2 = 6\}$

2. Encuentre los puntos de intersección de la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$ con la recta $y = 2x + 1$. Discuta el resultado con sus compañeros.

3. Encuentre los puntos de intersección de la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ con la parábola $y^2 = 4bx$.

Si algún miembro del equipo de trabajo decidió no participar en la resolución de los ejercicios, debe asumir las consecuencias de su **decisión**: Sacrificar tiempo extra para desatrasarse y pedir explicación; obtener resultados negativos en las evaluaciones y tener que recuperar logros.

ANÁLISIS DE LA ECUACIÓN GENERAL DE SEGUNDO GRADO EN DOS VARIABLES

Analizo cuándo una ecuación de 2° grado representa una circunferencia, una parábola, una elipse o una hipérbola.

Tengo libertad para **decidir** que apuntes debo consignar en el cuaderno. La ecuación $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$, donde a, b, c, d, e y f son constantes fijas y una, por lo menos, **a, b** o **c** es distinta de cero, representa secciones cónicas:

Las ecuaciones generalizadas para las cónicas de centro en C (h, k), están dadas por:

Circunferencia: $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ (1)

Parábola: $(x - h)^2 = 4a\,(y - k)$ (2)

$(y-k)^2 = 4a\,(x - h)$ (3)

Elipse: $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ (4)

$\frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$ (5)

Hipérbola: $$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1 \qquad (6)$$

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1 \qquad (7)$$

En la ecuación general $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$, si $b = 0$, pueden ocurrir tres casos:

1. Si $ac = 0$

   Si $ac = 0$, entonces $a = 0 \vee c = 0$. En ambos casos la ecuación $\mathbf{ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0}$ es una ecuación de segundo grado en una de las variables y de primer grado en la otra. Por lo tanto esta ecuación representa una PARÁBOLA. Se dice que la curva es de **género parabólico.**

2. Si $ac > 0$

   Si $ac > 0$, entonces **a** y **c** tienen el mismo signo, ambos positivos o ambos negativos; en cualquier caso, la ecuación $\mathbf{ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0}$ representa una ELIPSE si $a \neq \mathbf{c}$, o una CIRCUNFERENCIA si $\mathbf{a = c}$. Se dice que la curva es de **género elíptico** porque la circunferencia puede considerarse como una elipse con sus focos coincidentes.

3. Si $ac < 0$

   Si $ac < 0$, los coeficientes **a** y **c** tienen signos contrarios. En este caso, la ecuación $\mathbf{ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0}$ representa una HIPÉRBOLA.
   Se dice que la curva es de **género hiperbólico.**

Antes de analizar los ejemplos de este nuevo tema, analicemos los peligros a los que estamos expuestos los jóvenes. El más simple es el de consumir cigarrillos. La sensación de fumar se puede comparar con la gráfica de una parábola $x^2 = -4ay$, ascendente-descendente, pues al principio se siente placer y luego depresión, preocupación, remordimiento.

Información y comunicación

Con mis compañeros de subgrupo, analizamos el siguiente texto y respondemos las preguntas que se plantean al final.

La comunicación es la competencia que le permite al individuo comprender e interpretar mensajes, lo mismo que manifestar lo que se siente y piensa en relación con algún tema o situación de carácter personal o grupal.

La construcción de la comunicación debe pasar por la adquisición de habilidades para **escuchar, hablar, leer y escribir.**

La comunicación puede ser verbal y no verbal. Una persona se puede comunicar con otra en forma oral, escrita o por señales o códigos.

Se entiende la INFORMACIÓN como parte de la cultura, es decir, el conjunto de conocimientos, comportamientos, rituales y signos propios de los órdenes comunicativo, religioso, ideológico, ético y otros similares que caracterizan una sociedad.

En el mundo actual es cada vez mayor el flujo de INFORMACIÓN, de allí la necesidad de establecer nuevos canales de COMUNICACIÓN y aprendizaje que faciliten el acceso a la información disponible.

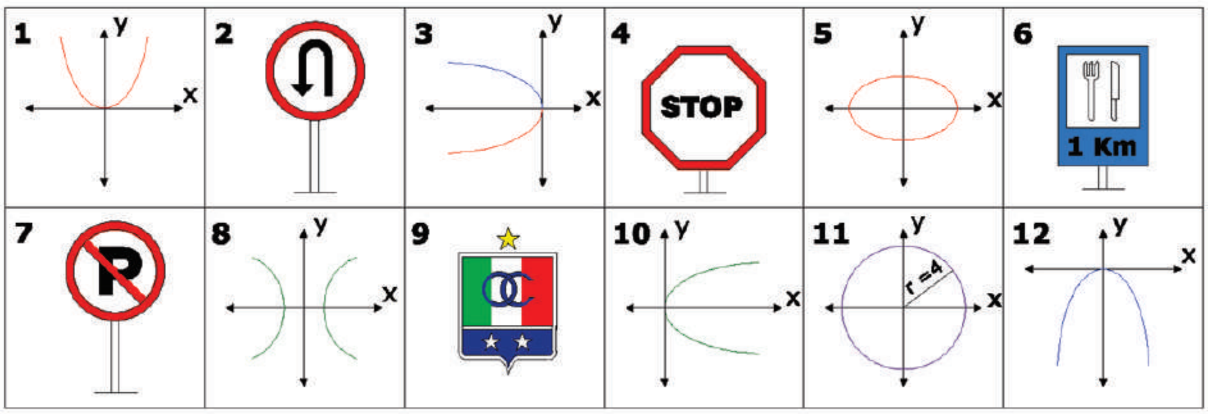
Con mis compañeros de subgrupo, respondemos:

1. ¿Qué diferencia hay entre procesos de información y comunicación?
2. ¿Qué canales de comunicación nos dan acceso a la información?

LA ELIPSE Y LA HIPÉRBOLA

Los símbolos y gráficos son recursos empleados en la comunicación. Con un compañero de grupo, interpreto los símbolos y resuelvo el ejercicio que se propone a continuación.

1. Tomo del CRA un juego de PIÉNSALO y resuelvo el siguiente ejercicio.



A HIPÉRBOLA	B PROHIBIDO PARQUEAR	C ELIPSE	D $x^2 + y^2 = 16$	E PARE	F $y^2 = 4ax$
G RESTAURANTE	H $x^2 = 4ay$	I $y^2 = -4ax$	J ONCE CALDAS	K $x^2 = -4ay$	L PERMITIDO GIRAR EN U

2. Tomo del CRA, el ejercicio No. 6 para practicar el Lenguaje de los Sordomudos con el juego PIÉNSALO.

Presento los ejercicios al profesor para su revisión y evaluación.

LA ELIPSE

El lenguaje de los símbolos se hace más importante en el estudio de las Matemáticas y la **exactitud** en su escritura, es fundamental para representar el concepto que se está definiendo.

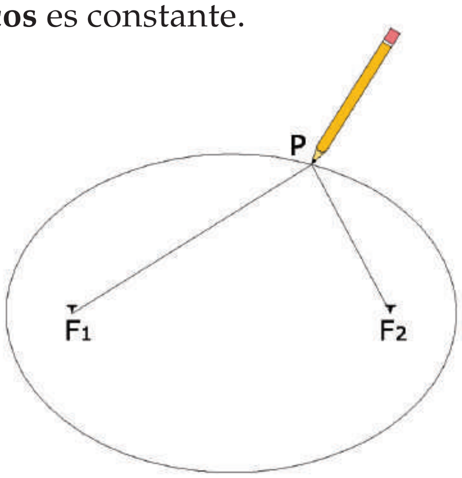
Analizo e interpreto con mis compañeros de subgrupo, la definición de elipse, la deducción de su relación matemática y sus gráficas. Después de una puesta en común en presencia del profesor, consignamos lo fundamental en el cuaderno.

ELIPSE

La **elipse** es el conjunto de todos los puntos del plano tales que la suma de las distancias a dos puntos fijos llamados **focos** es constante.

La definición nos da una manera sencilla para construir la elipse con una cuerda:

En los puntos fijos se ata una cuerda de longitud dada y constante. Se tensiona la cuerda, con la punta afilada de un lápiz, en P y manteniéndola siempre tensa se deja deslizar el lápiz.



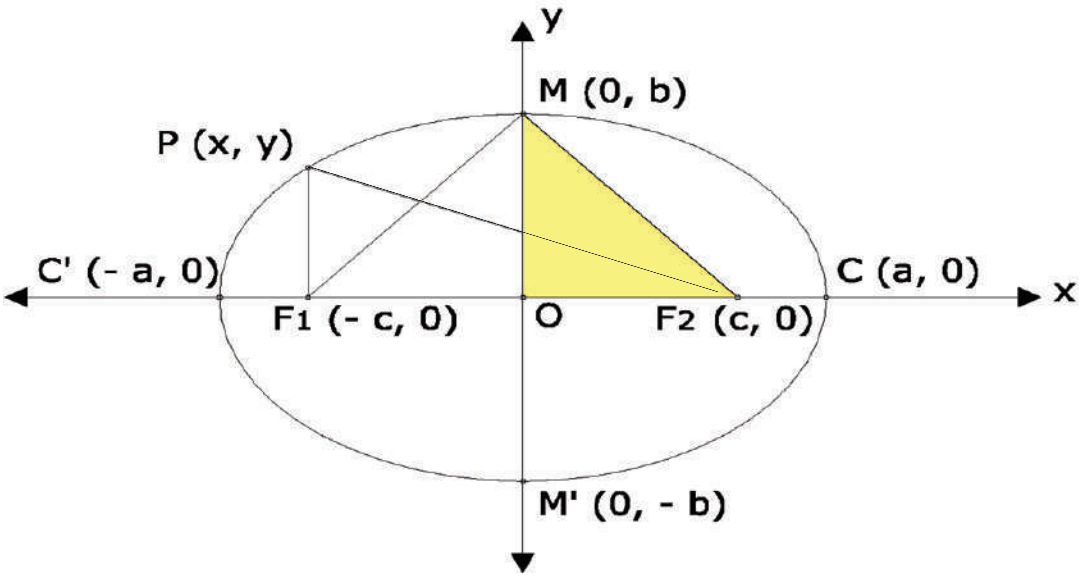
La figura dibujada es una elipse porque $PF_1 + PF_2$ = longitud de la cuerda, que es constante cualquiera sea la posición de P.

Por comodidad, tomemos dos puntos fijos (focos) sobre el eje X de tal manera que estén a la misma distancia (c) del origen.

Sean F_1 (- c, 0) y F_2 (c, 0) los focos. Si P (x, y) es un punto variable que recorre la elipse, entonces:

ELIPSE = {P (x, y): $PF_1 + PF_2$ = constante}

ELIPSE = {P (x, y): $PF_1 + PF_2 = 2a$} (1)



El punto M pertenece a la mediatriz del segmento F_1F_2 y por lo tanto, $MF_1 = MF_2$.

El punto M está sobre la elipse, entonces la suma de las distancias a los focos es constante e igual a 2a:

$MF_1 + MF_2 = 2a$
$2\ MF_2 = 2a$
$\mathbf{MF_2 = a}$; así mismo $\mathbf{MF_1 = a}$
De la gráfica $OM = b$; $OF_1 = OF_2 = c$.

El triángulo MOF_2 es un triángulo rectángulo con hipotenusa $MF_2 = a$ y catetos $OM = b$ y $OF_2 = c$. Por tanto, podemos aplicar el Teorema de Pitágoras:

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2} \qquad (2)$$

Aplicamos la fórmula de la distancia a las longitudes PF_1 y PF_2:

$$PF_1 = \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \qquad (3)$$

$$PF_2 = \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \qquad (4)$$

Reemplazando las igualdades (3) y (4) en (1)

$$\text{ELIPSE} = \{ (x,y) : \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \}$$

$$\text{ELIPSE} = \{ (x,y) : \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \}$$